Informatik Q4 Abels

Boolesche Funktion

Boolesche Funktion

Definition

Für $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 1$ heißt die Funktion $F: B^n \to B^m$ **Schaltfunktion**.

Eine Schaltfunktion $f: B^n \to B$ heißt **n-stellige Boolesche Funktion**.

Übung 1

Wie viele 1-stellige Boolesche Funktionen gibt es?

Wie viele 2-stellige Boolesche Funktionen gibt es?

...

Wie viele n-stellige Boolesche Funktionen gibt es?

Liste alle 1- und 2-stelligen Booleschen Funktionen auf.

Übung 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es 2^{2^n} n-stellige Boolesche Funktionen.

n=1: **4** 1-stellige Boolesche Funktionen

n=2: **16** 1-stellige Boolesche Funktionen

n=3: **256** 1-stellige Boolesche Funktionen

…

Boolesche Funktion

Beispiel: 1-stellig

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$$f_0(x) = 0$$

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \neg x = \overline{x}$$

$$f_3(x) = 1$$

Boolesche Funktion

Beispiel: 2-stellig

x	y	$f_0(x) = x \cdot \neg x$	$f_1(x) = x \cdot y$	$f_2(x) = x \cdot \neg y$	$f_3(x) = x$	$f_4(x) = \neg x \cdot y$	$f_5(x) = y$	$f_6(x) = x \oplus y$	$f_7(x) = x + y$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	$f_8(x) = x \downarrow y$	$f_9(x) = \neg(x \oplus y)$	$f_{10}(x) = \neg y$	$f_{11}(x) = x + \neg y$	$f_{12}(x) = \neg x$	$f_{13}(x) = \neg x + y$	$f_{14}(x) = x \uparrow y$	$f_{15}(x) = x + \neg x$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Übung 2

Stelle folgende Boolesche Funktion f, die als Funktionstafel dargestellt ist, als Funktionsgleichung dar:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Übung 2 (Option 1)

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Einschlägige Indizes:

3, 5, 7

Minterme:

$$m_3 = \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$
$$m_5 = x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3$$
$$m_7 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Disjunktive Normalform (DNF)

Definition + Beispiel

Jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als Summe der Minterme (SOP = Sum-of-Products) ihrer einschlägigen Indizes:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

$$= m_3 + m_5 + m_7$$

$$= \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Übung 2 (Option 2)

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Nicht einschlägige Indizes:

0, 1, 2, 4, 6

Maxterme:

$$M_0 = \neg m_0$$
$$= \neg(\neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$
$$= x_1 + \neg x_2 + \neg x_3$$

…

Konjunktive Normalform (KNF)

Definition + Beispiel

Jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als Produkt der Maxterme (POS = Product-of-Sums) ihrer nicht einschlägigen Indizes:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \neg(m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_6)$$

$$= \neg m_0 \cdot \neg m_1 \cdot \neg m_2 \cdot \neg m_4 \cdot \neg m_6$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_6$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \neg x_3) \cdot (x_1 + \neg x_2 + x_3) \cdot (\neg x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\neg x_1 + \neg x_2 + x_3)$$

Übung 3

- Bestimme zur gegebenen Funktionstafel die DNF und die KNF.
- Fasse die Funktionsgleichungen danach durch Anwendung der Booleschen Gesetze zusammen. Was fällt dir auf?
- Wann ist die DNF, wann die KNF sinnvoller?

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Übung 3

DNF:

$$f_1(x_1, x_2) = m_0 + m_1 + m_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 + x_1x_2$$

$$= \overline{x_1}(\overline{x_2} + x_2) + x_1x_2 = \overline{x_1}(1) + x_1x_2 = \overline{x_1} + x_1x_2 = \overline{x_1} + x_2$$

KNF:

$$f_1(x_1, x_2) = M_2 = \overline{x_1} + x_2$$

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

⇒ DNF sinnvoller bei wenigen 1en

⇒ KNF sinnvoller bei wenigen 0en

⇒ DNF und KNF sind vereinfacht identisch

Übung 4

- Bestimme zur gegebenen Funktionstafel die DNF und die KNF.
- Fasse die Funktionsgleichungen danach durch Anwendung der Booleschen Gesetze zusammen. Was fällt dir auf?
- Wann ist die DNF, wann die KNF sinnvoller?

x_1	x_2	x_3	$f_2(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Übung 3

DNF:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3$$
$$= \overline{x_1}(x_2 \oplus x_3) + x_1 \cdot \overline{x_2\overline{x_3}}$$

… Optimierung dann im Studium …

KNF:

$$f_1(x_1, x_2) = M_0 \cdot M_3 \cdot M_6$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)$$

⇒ DNF sinnvoller bei wenigen 1en

⇒ KNF sinnvoller bei wenigen 0en

⇒ DNF und KNF sind vereinfacht identisch

x_1	x_2	x_3	$f_2(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tagebucheintrag

Boolesche Funktion

Wochenübung

Bestimme zu gegebenen Funktionen $f: B^3 \to B$ die DNF (Boolesche Gesetze), stelle dann die Funktionstafel auf und bestimme dann die zugehörige KNF.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2(\overline{x_1} + \overline{x_3}) + \overline{x_2}(x_1 x_3 + x_2) + x_3(x_2\overline{x_3} + x_1 x_2) + x_1 x_2 \overline{x_3}$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}(x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1) + \overline{x_2}(\overline{x_1} x_3 + x_1 \overline{x_3}) + x_1(\overline{x_1} x_3 + x_2 \overline{x_3})$