

Informatik Q4 Abels



Boolesche **Funktion**

Boolesche Funktion

Definition

Für $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 1$ heißt die Funktion $F: B^n \rightarrow B^m$ **Schaltfunktion**.

Eine Schaltfunktion $f: B^n \rightarrow B$ heißt **n-stellige Boolesche Funktion**.



Übung 1

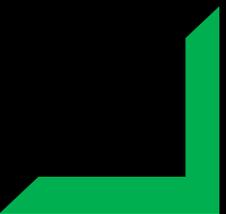
Wie viele 1-stellige Boolesche Funktionen gibt es?

Wie viele 2-stellige Boolesche Funktionen gibt es?

...

Wie viele n -stellige Boolesche Funktionen gibt es?

Liste alle 1- und 2-stelligen Booleschen Funktionen auf.





Übung 1



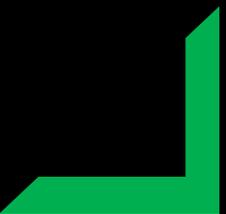
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es 2^{2^n} n -stellige Boolesche Funktionen.

n=1: 4 1-stellige Boolesche Funktionen

n=2: 16 1-stellige Boolesche Funktionen

n=3: 256 1-stellige Boolesche Funktionen

...



Boolesche Funktion

Beispiel: 1-stellig

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$$f_0(x) = 0$$

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \neg x = \bar{x}$$

$$f_3(x) = 1$$

Boolesche Funktion

Beispiel: 2-stellig

x	y	$f_0(x)$ $= x \cdot \neg x$	$f_1(x)$ $= x \cdot y$	$f_2(x)$ $= x \cdot \neg y$	$f_3(x)$ $= x$	$f_4(x)$ $= \neg x \cdot y$	$f_5(x)$ $= y$	$f_6(x)$ $= x \oplus y$	$f_7(x)$ $= x + y$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

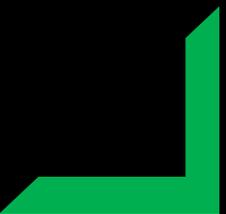
x	y	$f_8(x)$ $= x \downarrow y$	$f_9(x)$ $= \neg(x \oplus y)$	$f_{10}(x)$ $= \neg y$	$f_{11}(x)$ $= x + \neg y$	$f_{12}(x)$ $= \neg x$	$f_{13}(x)$ $= \neg x + y$	$f_{14}(x)$ $= x \uparrow y$	$f_{15}(x)$ $= x + \neg x$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1



Übung 2

Stelle folgende Boolesche Funktion f , die als Funktionstafel dargestellt ist, als Funktionsgleichung dar:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1





Übung 2 (Option 1)



i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

**Einschlägige
Indizes:**

3, 5, 7

Minterme:

$$m_3 = \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$m_5 = x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3$$

$$m_7 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Disjunktive Normalform (DNF)

Definition + Beispiel

Jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als Summe der Minterme (SOP = Sum-of-Products) ihrer einschlägigen Indizes:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

$$= m_3 + m_5 + m_7$$

$$= \neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \neg x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$



Übung 2 (Option 2)



i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

**Nicht
einschlägige
Indizes:**

0, 1, 2, 4, 6

Maxterme:

$$\begin{aligned}M_0 &= \neg m_0 \\ &= \neg(\neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \\ &= x_1 + \neg x_2 + \neg x_3\end{aligned}$$

...

Konjunktive Normalform (KNF)

Definition + Beispiel

Jede Boolesche Funktion ist eindeutig darstellbar als Produkt der Maxterme (POS = Product-of-Sums) ihrer nicht einschlägigen Indizes:

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

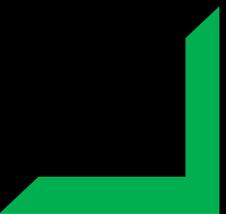
$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \neg(m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_6) \\ &= \neg m_0 \cdot \neg m_1 \cdot \neg m_2 \cdot \neg m_4 \cdot \neg m_6 \\ &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_6 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \neg x_3) \cdot \\ & \quad (x_1 + \neg x_2 + x_3) \cdot (\neg x_1 + x_2 + x_3) \cdot \\ & \quad (\neg x_1 + \neg x_2 + x_3) \end{aligned}$$



Übung 3

- Bestimme zur gegebenen Funktionstafel die DNF und die KNF.
- Fasse die Funktionsgleichungen danach durch Anwendung der Booleschen Gesetze zusammen. Was fällt dir auf?
- Wann ist die DNF, wann die KNF sinnvoller?

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1





Übung 3



DNF:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= m_0 + m_1 + m_3 = \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{x_1} x_2 + x_1 x_2 \\ &= \overline{x_1} (\overline{x_2} + x_2) + x_1 x_2 = \overline{x_1} (1) + x_1 x_2 = \overline{x_1} + x_1 x_2 = \overline{x_1} + x_2 \end{aligned}$$

KNF:

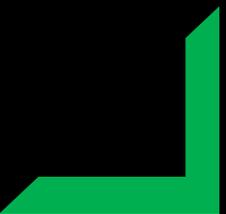
$$f_1(x_1, x_2) = M_2 = \overline{x_1} + x_2$$

⇒ DNF sinnvoller bei wenigen 1en

⇒ KNF sinnvoller bei wenigen 0en

⇒ DNF und KNF sind vereinfacht identisch

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

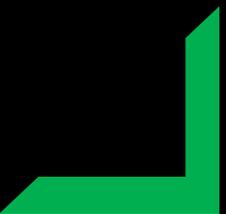




Übung 4

- Bestimme zur gegebenen Funktionstafel die DNF und die KNF.
- Fasse die Funktionsgleichungen danach durch Anwendung der Booleschen Gesetze zusammen. Was fällt dir auf?
- Wann ist die DNF, wann die KNF sinnvoller?

x_1	x_2	x_3	$f_2(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1





Übung 3



DNF:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, x_3) &= m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7 \\&= \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 x_3 \\&= \overline{x_1} (x_2 \oplus x_3) + x_1 \cdot \overline{x_2 x_3}\end{aligned}$$

→ ... Optimierung dann
im Studium ...

KNF:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= M_0 \cdot M_3 \cdot M_6 \\&= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)\end{aligned}$$

⇒ DNF sinnvoller bei wenigen 1en

⇒ KNF sinnvoller bei wenigen 0en

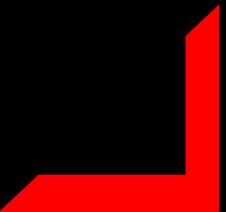
⇒ DNF und KNF sind vereinfacht identisch

x_1	x_2	x_3	$f_2(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



Tagebucheintrag

Boolesche Funktion





Wochenübung

Bestimme zu gegebenen Funktionen $f: B^3 \rightarrow B$ die DNF (Boolesche Gesetze), stelle dann die Funktionstafel auf und bestimme dann die zugehörige KNF.

a)
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (\overline{x_1} + \overline{x_3}) + \overline{x_2} (x_1 x_3 + x_2) + x_3 (x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2) + x_1 x_2 \overline{x_3}$$

b)
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} (x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1) + \overline{x_2} (\overline{x_1} x_3 + x_1 \overline{x_3}) + x_1 (\overline{x_1} x_3 + x_2 \overline{x_3})$$

