Mathematatik 10 Abels

Kopfübung

- Exponentielles Wachstum / Zerfall
- Exponentialfunktion
- Logarithmus
- Logarithmengesetze
- Modellierung
- Halbwerts- und Verdopplungszeit
- Logarithmusfunktionen

Präsentationen

I Fun74/3

3. Entscheide, ob in der Situation exponentielles Wachstum vorliegt. Wenn ja, gib den Wachstumsfaktor an und stelle eine Wachstumsgleichung auf.

① In einem Labor wird die Vermehrung von zunächst 500 Bakterien untersucht. Die Anzahl verdreifacht sich jeden Tag.

② Im Pool steht das Wasser 100 cm hoch. Jede Stunde fließt davon so viel Wasser aus dem Becken, dass der Wasserspiegel um 20 cm sinkt.

③ Die Anzahl an radioaktiven Kernen nimmt von anfangs 10 000 Kernen jede Sekunde um die Hälfte ab.

④ Vincent bekommt mit 10 Jahren 10 € Taschengeld. Jedes Jahr bekommt er 5 € mehr.

⑤ In einem Teich sind 20 Seerosen, nach zwei Jahren sind es 80 Stück und nach vier Jahren schon 320.

⑥ Eine Pflanze ist anfangs 15 cm, nach zwei Wochen 25 cm und nach vier Wochen 35 cm hoch.

II Fun74/5

5. Bei einem Konto wird ein Kapital von 4000 € zu 2,5 % p. a. verzinst. Die Zinsen werden dem Konto gutgeschrieben. Es wird nichts abgehoben.
   a) Berechne Kapital und Zinsen (in €) nach einem Jahr (nach 4 Jahren; nach 7 Jahren).
   b) Bestimme, wann das Kapital auf mehr als 5200 € angestiegen ist.
   c) Auf einem zweiten Konto werden 4000 € angelegt. Nach 5 Jahren sind daraus 4500 € geworden. Ermittle den Zinssatz.

III Fun75/7

7. Beim Vergleich verschiedener Tagesgeldkonten stößt Frau Müller auf zwei interessante Angebote. Bank A verspricht in den ersten zwei Anlagejahren einen jährlichen Zinssatz in Höhe von 2,4 %, danach von 2,2 %. Bank B garantiert einen jährlichen Zinssatz von 2,25 %.
   a) Frau Müller möchte 1000 € anlegen. Berechne für jedes der beiden Tagesgeldkonten, auf welchen Betrag das Anfangskapital innerhalb von 5 Jahren anwächst.
   b) Nach jeweils wie vielen Jahren verdoppelt sich das Anfangskapital von Frau Müller?

IV Fun75/8

8. Radioaktive Atomkerne zerfallen im Laufe der Zeit. Das Isotop Polonium-218 hat eine Halbwertszeit von 3 Minuten.
   a) Ermittle den Wachstumsfaktor b. Beschreibe die Anzahl der vorhandenen Kerne in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) durch eine Gleichung.
   b) Berechne, wie viel Prozent der Kerne nach 2 min (4 min; 8 min; 10 min) vorhanden sind.
   c) Berechne, wann 95 % der Polonium-Kerne zerfallen sind.

V Fun75/10

10. Bei lang andauernder Hitze entwickeln sich bestimmte Krankheitserreger besonders gut. Daher kommt es gerade im Sommer immer wieder zu Salmonelleninfektionen. Die Zahl der Salmonellen auf Lebensmitteln verdoppelt sich bei einer Temperatur von 37 °C alle 30 Minuten. In kühlen Kellerräumen beträgt die Verdopplungszeit 2,5 Stunden und im Kühlfach 2 Tage.

a) Stelle für jede der drei Umgebungen die Wachstumsfunktion für die Anzahl an Salmonellen in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden auf.

b) Eine Cremetorte wird um 10:00 Uhr hergestellt und mit 500 Salmonellen verunreinigt. Bestimme für jede Umgebung die Zahl der Salmonellen, die sich um 15:00 Uhr auf der Torte befinden.

VI Fun75/11

11. Auf einem 14 000 m^2 großen Teich existiert eine Algenart, deren Zellen sich in einem Tag durch Teilung verdoppeln. Zu Beginn der Beobachtung sind 16 m^2 des Teichs bedeckt.
    a) Gib die Gleichung der Wachstumsfunktion an.
    b) Berechne die Fläche, die nach 17 Tagen zugewachsen ist.
    c) Nach wie vielen Tagen sind 7000 m^2 bedeckt? Was bedeutet das für den Folgetag?

Gemischte Übungen

Fun76,77 I

1. Die Wertetabellen stellen exponentielle Vorgänge dar. Ergänze die fehlenden Einträge.

a)

n	0	1	2	3	6
B(n)	30	54			

b)

n	0	1	2	3	6
B(n)	140	70			

2. Prüfe, ob es sich um einen linearen oder einen exponentiellen Vorgang handelt. Gib eine rekursive und eine explizite Gleichung dazu an.

a)

n	1	2	3	4	5
B(n)	180	189	198,5	208,4	218,8

b)

n	0	1	2	3	4
B(n)	25	20	15	10	5

3. Ein Anfangskapital von 300 € wird zu einem Zinssatz von 1,35 % p. a. angelegt. Berechne das Kapital mit Zinseszinsen nach der angegebenen Zeitspanne.

a) 1 Jahr b) 3 Jahre c) 7 Jahre d) 19 Jahre e) 35 Jahre

4. a) Vince hat ein Kapital von 200 € angelegt. Nach 10 Jahre ist es auf 269 € angewachsen. Bestimme den Zinssatz.
   b) Emmy hat ein Kapital von 1000 € angelegt. Nach 7 Jahre ist auf 1361 € angewachsen. Bestimme den Zinssatz.
   c) Herr Müller hat ein Kapital zu einem Zinssatz von 1,5 % angelegt. Nach 8 Jahren sind es 901,19 €. Bestimme das Anfangskapital.

Fun76,77 **II**

5. In der Tabelle findest du Daten zur Population des Amurtigers.

Jahr	1930	1940	1950	1960	1970
Anzahl Tiere	30	45	65	100	150

a) Begründe, dass sich die Entwicklung annähernd durch exponentielles Wachstum beschreiben lässt.
Gib eine Funktionsgleichung an.
b) Berechne mit der Gleichung aus a) Schätzwerte für 1980, 1990, 2000 und 2010.
c) Im Jahr 1980 wurden rund 170 Tiere gezählt, 1990 rund 300 Tiere, 2000 rund 430 Tiere und 2010 rund 400 Tiere.
Vergleiche diese Entwicklung mit den Schätzwerten aus b).

6. Gib den Schnittpunkt mit der y-Achse, den Funktionswert an der Stelle $x = 1$ und die Asymptote des Graphen der Funktion f an.
a) $f(x) = 3{,}5 \cdot 5^x$ b) $f(x) = 4 \cdot 0{,}2^x$ c) $f(x) = 3^x + 4$ d) $f(x) = (-3) \cdot 2^x - 5$

7. a) Zeichne mit einem Funktionsplotter den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 0{,}5 \cdot 3^x - 10$.
Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen zeichnerisch und rechnerisch.
b) Beschreibe, wie der Graph von g gegenüber dem Graphen der Exponentialfunktion f mit $f(x) = 3^x$ verschoben, gestreckt bzw. gestaucht wurde.
c) Vergleiche den Graphen der Exponentialfunktion h mit $h(x) = 0{,}5 \cdot 3^x$ und den Graphen der Exponentialfunktion i mit $i(x) = 0{,}5 \cdot 3^{x-10}$.

8. Der Graph einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot b^x + c$ hat die Asymptote $y = 1$ und verläuft durch die Punkte $(0|7)$ und $(1|10)$. Bestimme die Parameter.

Fun76,77 III

9. Prüfe, ob die Situation durch eine Exponentialfunktion modelliert werden kann. Begründe deine Antwort. Stelle eine Funktionsgleichung auf, soweit das möglich ist.
   a) Eine Bakterienkultur besteht zu Beginn aus 1000 Bakterien. Ihre Anzahl nimmt um 75 % pro Tag zu. In der Kultur können höchstens 30 000 Bakterien leben.
   b) Eine gekühlte Flüssigkeit hat eine Temperatur von 5 °C. Sie wird in eine Umgebung mit einer Temperatur von 24 °C gebracht. Die Temperaturdifferenz zwischen der Umgebungs- und der Flüssigkeitstemperatur nimmt um 10 % pro Minute ab.
   c) Eine Bakterienkultur aus zunächst 1000 Bakterien nimmt um 5 % pro Tag zu.
   d) Mia hat Schulden, sie überzieht ihr Konto um 10 000 €. Für ihren Dispo-Kredit beträgt der Dispo-Zins 10,5 % pro Jahr.

10. Berechne im Kopf.
    a) $\log_2(16)$ b) $\log_{10}(1000)$ c) $\log_4(64)$ d) $\log_5(1)$ e) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

11. Löse die Exponentialgleichungen. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.
    a) $3^x = 1000$ b) $1{,}02^x - 300 = 450$ c) $40 + 0{,}92^x = 71{,}8$ d) $2 \cdot 1{,}18^x = 48\,000$

Fun76,77 IV

12. a) Eine Population besteht aus 500 Kaninchen. Ihre Anzahl nimmt pro Jahr um 30 % zu. Berechne, wann sich die Anzahl der Tiere verdreifacht hat.
    b) In einem Gewächshaus werden 20 Gramm eines Schädlingsbekämpfungsmittels versprüht und dabei gleichmäßig verteilt. Der Abbau des Mittels in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) wird durch die Gleichung $f(t) = 20 \cdot 0{,}995^t$ (in Gramm) beschrieben. Berechne die Zeitspanne, nach der noch 18 Gramm (15 Gramm; 10 Gramm; 2 Gramm) des Mittels im Gewächshaus vorhanden sind.

13. Tenside in Waschmitteln müssen so beschaffen sein, dass sie unter Laborbedingungen in 28 Tagen vollständig abgebaut sind. Der Abbau verläuft exponentiell. In ein Klärbecken wird Wasser eingeleitet, das pro Liter 4 mℓ Tenside enthält. Nach einem Tag misst man eine Konzentration von 3 mℓ pro Liter Wasser.
    a) Bestimme eine Funktion für den Gehalt an Tensiden nach t Stunden.
    b) Gib den Gehalt nach 2 Tagen und nach 28 Tagen an.
    c) Nach den Bestimmungen sollte die Halbwertszeit für Tenside in der Kläranlage nur wenige Stunden betragen. Berechne die Halbwertszeit für die Funktion aus a).
    d) Begründe, dass im exponentiellen Modell ein „vollständiger Abbau" im Sinne von $f(t) = 0$ nicht möglich ist.
    e) Die Kläranlage wird so geändert, dass die Halbwertszeit für den Abbau von Tensiden 9 Stunden beträgt. Berechne den Faktor für den Abbauprozess. Berechne, wie viel Prozent der Tenside von anfangs 100 % nach 28 Tagen noch vorhanden sind.

Fun76,77

S.76, 1.

a)

n	0	1	2	3	6
B(n)	30	54	97,2	174,96	1020

b)

n	0	1	2	3	6
B(n)	140	70	35	17,5	2,1875

S.76, 2.

a) rekursiv: $B(n+1) = B(n) \cdot 1{,}05$ mit $B(0) = 171{,}4$
explizit: $B(n) = 171{,}4 \cdot 1{,}05^n$

b) rekursiv: $B(n+1) = B(n) - 5$ mit $B(0) = 25$
explizit: $B(n) = -5n + 25$

S.76, 3.

a) $B(1) = 304{,}05$ € b) $B(3) \approx 312{,}32$ €
c) $B(7) \approx 329{,}52$ € d) $B(19) \approx 387{,}06$ €
e) $B(35) \approx 479{,}68$ €

S.76, 4.

a) rund 3 % b) rund 4,5 % c) 800 €

S.76, 5.

a) Alle 10 Jahre wächst die Population ungefähr um 50 %. $B(n) = 30 \cdot 1{,}5^n$; wobei n einer Zehnjahresspanne entspricht.

b) $B(1980) = 225$; $B(1990) \approx 338$; $B(2000) \approx 507$; $B(2010) \approx 761$

c) Es sind viel weniger Tiere hinzugekommen als erwartet, d. h., die Wachstumsannahme muss korrigiert werden.

S.76, 6.

a) $f(1) = 17{,}5$; $S_y(0|3{,}5)$; Asymptote ist die x-Achse.

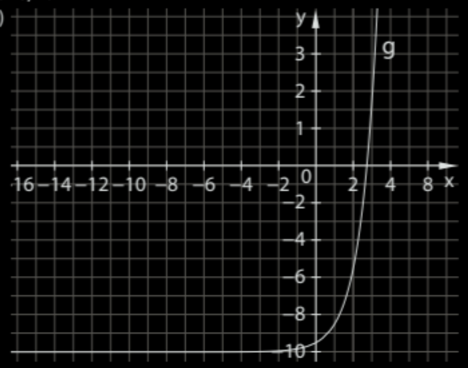
b) $f(1) = 0{,}8$; $S_y(0|4)$; Asymptote ist die x-Achse.

c) $f(1) = 7$; $S_y(0|5)$; Asymptote ist die Gerade mit $y = 4$.

d) $f(1) = -11$; $S_y(0|-8)$ Asymptote ist die Gerade mit $y = -5$.

S.76, 7.

a)



$S_x(2{,}7|0)$; $S_y(0|-9{,}5)$

b) Der Graph von g wurde um den Faktor 0,5 gestaucht und um 10 Einheiten in negative Richtung entlang y-Achse verschoben.

c) Bei h wurde der Graph um den Faktor 0,5 gestaucht. Der Graph von i ist im Vergleich zu h zusätzlich um 10 Einheiten in positiver Richtung auf der x-Achse verschoben.

S.76, 8.

Ansatz: $f(x) = a \cdot b^x + c$
Da $y = 1$ die Asymptote ist, ist $c = 1$.
Einsetzen des Punktes $(0|7)$ ergibt:
$f(0) = 7 = a \cdot b^0 + 1 = a + 1 \rightarrow a = 6$
Einsetzen des Punktes $(1|10)$ ergibt:
$f(1) = 10 = 6 \cdot b^1 + 1 \rightarrow 9 = 6b \rightarrow b = 1{,}5$
$f(x) = 6 \cdot 1{,}5^x + 1$

S.77, 9.

Bei a) und b) wird das Wachstum durch die Maximalzahl 30 000 nach oben bzw. die Umgebungstemperatur nach unten begrenzt, daher kann es nicht durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.
Bei c) und d) sind keine begrenzenden Faktoren genannt.
c) $f(t) = 1000 \cdot 1{,}05^t$
d) $f(t) = 10\,000 \cdot 1{,}105^t$

S.77, 10.

a) 4 b) 3 c) 3 d) 0 e) −1

S.77, 11.

a) $x \approx 6{,}29$ b) $x \approx 334{,}3$
c) $x \approx -41{,}49$ d) $x \approx 60{,}94$

S.77, 12.

a) nach ungefähr 4,2 Jahren

b) Nach rund 21 Tagen sind noch 18 g vorhanden.
Nach rund 58 Tagen sind noch 15 g vorhanden.
Nach rund 139 Tagen sind noch 10 g vorhanden.
Nach rund 460 Tagen sind noch 2 g vorhanden.

S.77, 13.

a) Anfangswert $a = 4$
$f(24) = 4 \cdot b^{24} = 3$, also $b \approx 0{,}988$
$f(t) = 4 \cdot 0{,}988^t$

b) $f(48) \approx 2{,}24$ [mℓ]
$f(672) \approx 0{,}0012$ [mℓ]

c) $t_H = \log_{0{,}988}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 57{,}4$
Die Halbwertszeit beträgt etwa 57,5 Stunden.

d) Die Exponentialfunktion f hat keine Nullstelle.

e) $4 \cdot b^9 = 2$, also $b \approx 0{,}926$
Nach 28 Tagen: $0{,}926^{672} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-23}$,
also $3{,}7 \cdot 10^{-21}$ %

Hausaufgabe

Mathematik *Fach*

9./10. Klasse *Klasse*

Exponentialfunktion und Logarithmus *Reihe*

* *Thema*

* *Lektion*