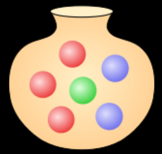
Mathematatik 10 Abels

Kopfübung

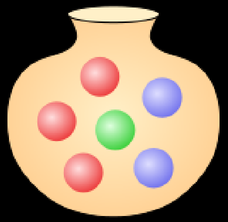
- $5^3 = \cdots$
- $5! = \cdots$
- $\frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \cdots$

Wie funktioniert ein Urnenmodell?

Wie viele unterschiedliche dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden?	Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Schülern 3 in einer Reihe aufzustellen?
Wie viele Dreierkombinationen aus den Zahlen 2, 4, 6 und 8 gibt es?	Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 26 Schülern 4 für einen Preis vorzuschlagen?

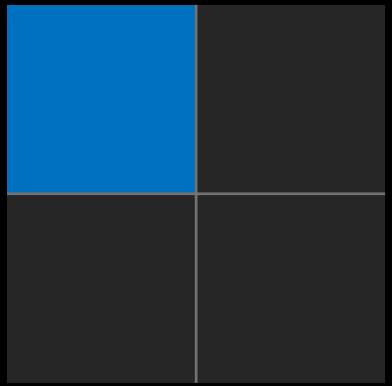
	?	?
?	Wie viele unterschiedliche dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden? $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$	Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Schülern 3 in einer Reihe aufzustellen? $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
?	Wie viele Dreierkombinationen aus den Zahlen 2, 4, 6 und 8 gibt es? $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$	Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Schülern 2 für einen Preis vorzuschlagen? $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Urnenmodell



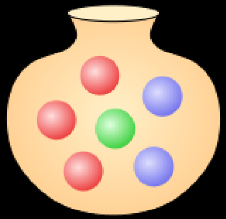
	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge



Aus einer Urne mit n Kugeln wird k-mal nacheinander eine Kugel gezogen und anschließend wieder zurückgelegt.
Die Anzahl an Möglichkeiten beträgt:

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k}$$



Fun176,177

1. Ein Ziffernschloss hat vier Einstellungen für die Ziffern 0 bis 9.
   Bestimme die Anzahl der Zahlenkombinationen.

2. Wie viel dreiziffrige Zahlen kann man aus den Ziffern 3, 5, 6 und 8 bilden?

3. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, drei Buchstaben des Alphabets zu kombinieren.

4. In der Mensa der Max-Planck-Schule gibt es acht Lampen, die einzeln ein- und ausgeschaltet werden können. Wie viele unterschiedliche Schaltmöglichkeiten gibt es?

5. Die Schüler der Klasse 10a wollen Passwörter für ihre Computer erstellen. Die Passwörter bestehen aus sechs Zeichen, die ersten zwei sollen kleine Buchstaben sein, die letzten vier Ziffern. Bestimme die Anzahl der Passwörter, die die Schüler bilden können.

6. Aus einer Urne mit einer roten, einer grünen und einer blauen Kugel wird viermal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und die Farbe notiert.
   a) Wie viele verschiedene Farbkombinationen sind möglich?
   b) Wie viele Farbkombinationen sind möglich, wenn noch eine gelbe Kugel hinzukommt?

Fun176,177

Seite 176 | Einstieg

Für jeden der sechs Punkte gibt es zwei Möglichkeiten, also können $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ unterschiedliche Zeichen dargestellt werden.

Seite 176 | Aufgabe 1

$10^4 = 10\,000$ Zahlenkombinationen

Seite 176 | Aufgabe 2

$4^3 = 64$ Zahlen

Seite 177 | Aufgabe 3

$26^3 = 17\,576$ Möglichkeiten

Seite 177 | Aufgabe 4

$2^8 = 256$ Schaltmöglichkeiten

Seite 177 | Aufgabe 5

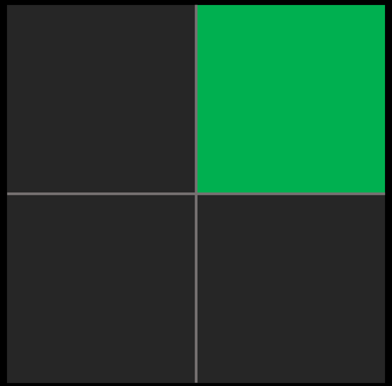
$26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000$ Passwörter, falls ä, ö, ü und ß nicht zugelassen sind.

Seite 177 | Aufgabe 6

a) $3^4 = 81$ Farbkombinationen

b) $4^4 = 256$ Farbkombinationen

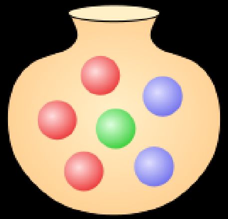
Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge



Aus einer Urne mit $\boldsymbol{n}$ Kugeln wird $\boldsymbol{k}$-mal nacheinander eine Kugel gezogen und nicht wieder zurückgelegt.

Die Anzahl an Möglichkeiten beträgt:

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \underbrace{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}-1)\cdot(\boldsymbol{n}-2)\cdot\ldots\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+1)}_{\boldsymbol{k}}$$



Fun178

7. Berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine Perlenkette mit zwölf verschiedenen Perlen anzuordnen.

8. In einer Bibliothek stehen in einem Regal fünf Kriminalromane. Sie sollen nach ihrer Beliebtheit angeordnet werden.
   Bestimme die Anzahl der Anordnungen.

9. Joschua kauft für den Physikunterricht vier verschiedenen Lampenfassungen mit zugehörigen Glühlampen. Jede Glühlampe gehört in eine bestimmte Fassung.
   Als er in den Unterricht kommt, liegen alle Utensilien durcheinander.
   a) Berechne die Anzahl der Zuordnungen von Glühlampen und Fassungen.
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Joschua beim ersten Versuch zufällig alle Glühlampen auf die richtigen Fassungen schraubt.

10. Eine Pension hat acht Einzelzimmer. Am Vormittag möchten acht Personen ein Einzelzimmer mieten.
    Berechne, wie viele Möglichkeiten der Zimmerverteilung es gibt.

11. Die Klausuren in den Fächern Mathematik und Physik werden an der Einstein-Schule stets in einem dafür vorgesehenen Raum geschrieben. Der Raum hat 30 Einzeltische.
    Berechne, auf wie viele Arten 26 Schüler Plätze darin zugewiesen bekommen können.

12. Nacheinander kommen sechs Schüler in den Warteraum der Schulleitung zu einer Besprechung. Der Warteraum weist 10 Sitzmöglichkeiten auf.
    Bestimme die Anzahl der möglichen Platzwahlen.

Fun178

Seite 178 | Aufgabe 7

$12! = 479\,001\,600$ Möglichkeiten

Seite 178 | Aufgabe 8

Es gibt $5! = 120$ mögliche Reihenfolgen für die Beliebtheit der Romane – vorausgesetzt keine zwei Romane sind gleich beliebt. Sobald die Reihenfolge der Beliebtheit feststeht, gibt es (und danach wurde gefragt) nur eine mögliche Anordnung im Regal.

Seite 178 | Aufgabe 9

a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Zuordnungen

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24} = 4{,}1\overline{6}\,\%$

Seite 178 | Aufgabe 10

$8! = 40\,320$ mögliche Zimmerverteilungen

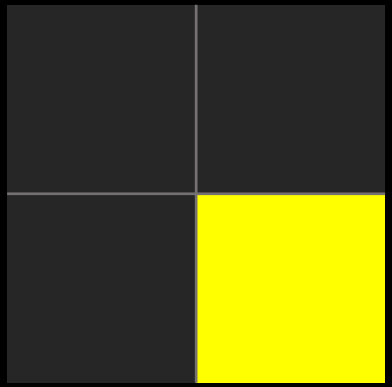
Seite 178 | Aufgabe 11

$\frac{30!}{(30-26)!} = 1{,}1 \cdot 10^{31}$

Seite 178 | Aufgabe 12

$\frac{10!}{(10-6)!} = 151\,200$ Sitzmöglichkeiten

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge



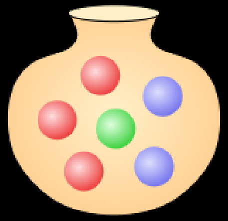
Aus einer Urne mit $\boldsymbol{n}$ Kugeln werden $\boldsymbol{k}$ Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen und nicht wieder zurückgelegt.

Die Anzahl an Möglichkeiten beträgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{k}}$$

Binomialkoeffizient

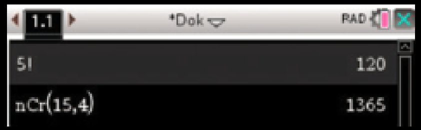
Fakultät



Fun181

1. Berechne die Binomialkoeffizienten.
   a) $\binom{6}{3}$ b) $\binom{8}{7}$ c) $\binom{6}{6}$ d) $\binom{8}{4}$ e) $\binom{20}{12}$

2. Bestimme den Wert mit einem Hilfsmittel wie zum Beispiel einem WTR.
   a) $7!$ b) $10!$ c) $\binom{8}{3}$ d) $\binom{15}{10}$



3. Berechne die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige beim Lotto „4 aus 6“.

4. Nach einem Preisausschreiben werden 11 Schüler ausgelost. Der Lehrer kann fünf Schüler von diesen elf Schülern auswählen. Berechne die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten.

5. In einer Kleinstadt gibt es 5 500 Telefonanschlüsse.
   Berechne die Anzahl der möglichen Gesprächspaarungen.

6. Aus der Klasse 10b sollen von den 26 Schülern vier Schüler für einen Preis vorgeschlagen werden. Berechne, wie viele Zusammenstellungen möglich sind.

7. An einem Volleyballturnier nehmen sechs Mannschaften teil.
   Berechne die Anzahl der möglichen Endspielpaarungen.

8. Ein Imker muss einen Milbentest vornehmen. Er entnimmt 50 Bienen aus seinem Volk.
   Von diesen 50 Bienen wählt er fünf Tiere für den Test aus.
   Berechne die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten.

9. Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden vier (fünf) Karten entnommen.
   Berechne die Anzahl der Möglichkeiten.

Fun181

Seite 181 | Aufgabe 1

a) 20 b) 8 c) 1 d) 70 e) 125 970

Seite 181 | Aufgabe 2

a) 5040 b) 3 628 800 c) 56 d) 3003

Seite 181 | Aufgabe 3

Es gibt $\frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = 15$ mögliche Ziehungen. Davon ist eine richtig, also: P(vier Richtige im Lotto) $= \frac{1}{15} \approx 6{,}67\ \%$

Seite 181 | Aufgabe 4

$\frac{11!}{(11-5)! \cdot 5!} = 462$ Auswahlmöglichkeiten

Seite 181 | Aufgabe 5

$\frac{5500!}{2! \cdot (5500-2)!} = \frac{5500 \cdot 5499 \cdot 5498!}{2! \cdot 5498!} = \frac{5500 \cdot 5499}{2 \cdot 1} = 15\,122\,250$ mögliche Gesprächspaarungen

Seite 181 | Aufgabe 6

$\frac{26!}{4! \cdot (26-4)!} = 14\,950$ Zusammenstellungen

Seite 181 | Aufgabe 7

$\frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = 15$ mögliche Endspielpaarungen

Seite 181 | Aufgabe 8

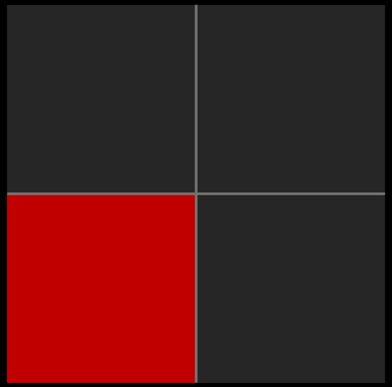
$\frac{50!}{5! \cdot (50-5)!} = 2\,118\,760$ Auswahlmöglichkeiten

Seite 181 | Aufgabe 9

vier Karten: $\frac{32!}{4! \cdot (32-4)!} = 35\,960$ Möglichkeiten

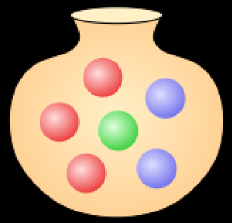
fünf Karten: $\frac{32!}{5! \cdot (32-5)!} = 201\,376$ Möglichkeiten

Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge



Aus einer Urne mit $\boldsymbol{n}$ Kugeln werden $\boldsymbol{k}$ Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge mit Zurücklegen gezogen.
Die Anzahl an Möglichkeiten beträgt:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

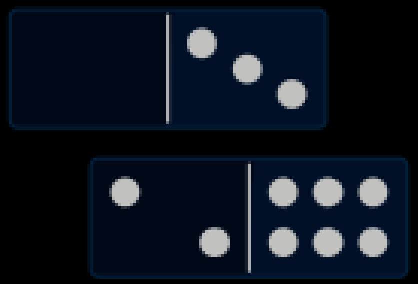


Fun182

10. In einer Urne befinden sich fünf verschiedenfarbige Kugeln. Drei Kugeln werden mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen. Berechne die Anzahl der Ziehungen.

11. Zwei nicht unterscheidbare Kugeln sollen auf zwei Fächer verteilt werden, wobei auch zwei Kugeln pro Fach erlaubt sind. Berechne die Anzahl der Verteilungen.

12. Ein kleines Dominospiel verwendet nur die Zahlen 0 bis 6.
Bestimme die Anzahl der Dominosteine mithilfe einer Ziehung ohne Reihenfolge und mit Zurücklegen.



13. Ein Würfel wird 7-mal geworfen. Bestimme die Anzahl der Ergebnisse, wenn es
a) auf die Reihenfolge der Würfe ankommt,
b) auf die Reihenfolge der Würfe nicht ankommt.

Fun182

Seite 182 | Aufgabe 10

$n = 5$; $k = 3$; also $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 35$ Möglichkeiten

Seite 182 | Aufgabe 11

Es gibt drei Möglichkeiten: beide Kugeln ins erste Fach, beide Kugeln ins zweite Fach, in jedes Fach eine Kugel.

Mithilfe der Formel: $n = 2$; $k = 2$; also $\binom{2+2-1}{2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$ Verteilungen

Seite 182 | Aufgabe 12

Die Kugeln sind die Punktbilder, also $n = 7$. Pro Stein werden zwei Punktbilder gezogen, und zwar mit Zurücklegen (da ein Dominostein zwei gleiche Zahlen haben darf) und ohne Beachtung der Reihenfolge (da die Steine gedreht werden können).

Somit gibt es $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = 28$ Spielsteine.

Seite 182 | Aufgabe 13

$n = 6$; $k = 7$

a) $6^7 = 279\,936$

b) $\binom{6+7-1}{7} = \binom{12}{7} = 792$

Hausaufgabe

Fun183

19. Beim Lotto „6 aus 49“ werden 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen 1 bis 49 ohne Zurücklegen gezogen.

a) Bestimme die Anzahl der möglichen Ausgänge einer Ziehung.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige.

c) Beschreibe das Ereignis E, wenn gilt

$$P(E) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}.$$

d) Berechne wie in Aufgabenteil b) die Wahrscheinlichkeit für

① 5 richtige Gewinnzahlen und ② eine richtige Gewinnzahl.