

Mathematik 10 Abels





Kopfübung

- Pfadmultiplikation
- Pfadaddition
- Gegenereignis
- Urnenmodell: 4 Fälle



Gemischte Übungen I



Fun186,187 II

7. In den Klassen 10a, 10b, 10c und 10d wird jeweils eine Umfrage durchgeführt. Da die Zeit knapp ist, wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und dann befragt.

Klasse	Mädchen	Jungen
10a	15	13
10b	12	15
10c	14	16
10d	16	12



- Berechne, wie viele Möglichkeiten der Auswahl es gibt.
- a) Aus jeder Klasse werden drei Schüler ausgewählt.
- b) Aus jeder Klasse werden zwei Jungen und zwei Mädchen ausgewählt.
8. In einem Raum befinden sich 23 Personen.
- a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens zwei Personen im Raum am gleichen Tag Geburtstag haben.
- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit. Nutze dazu das Gegenereignis.
9. Vier Mädchen und vier Jungen wollen gemeinsam ins Kino gehen. Allerdings gibt es für die Vorstellung, die sie sich ausgesucht haben, nur noch vier Tickets. Die acht Kinder lösen.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.
- a) Es werden zwei Mädchen und zwei Jungen ausgelost.
- b) Es werden die vier Jungen ausgelost.

10. Bei einer Prüfung gibt es sieben Algebra- und fünf Geometrie-Aufgaben. Es müssen fünf Aufgaben gelöst werden, davon drei Algebra- und zwei Geometrie-Aufgaben. Berechne die Anzahl der Zusammenstellungen der Prüfungsaufgaben.
11. Bei einem Abendessen sollen 8 Personen um einen runden Tisch sitzen. Berechne die Anzahl der Sitzordnungen, wenn es nicht auf den Stuhl, sondern auf die Nachbarn ankommt.
12. Marina sitzt im Flur vor einem Festsaal. Als alle anstoßen, zählt sie die Anzahl der Geräusche aneinanderstoßender Gläser mit: 25.
- a) Begründe, warum Marina sich verzählt haben muss.
- b) Stelle eine begründete Vermutung auf, wie viele Gäste im Festsaal sind.
13. In einem Park werden 6 Tauben von einem Spaziergänger aufgeschreckt. Die Tiere fliegen in die umstehenden 10 Bäume und verteilen sich dabei so, dass in keinem Baum mehr als eine Taube sitzt.
- a) Mit welchem Urnenmodell kann die Verteilung der Tauben auf die Bäume modelliert werden, wenn die Tauben nicht zu unterscheiden sind? Benenne n und k . Berechne die Anzahl der möglichen Verteilungen.
- b) Berechne die Anzahl der möglichen Verteilungen, wenn in jedem Baum auch mehr als eine Taube sitzen kann.
- c) Berechne mithilfe einer Tabellenkalkulation für beide Fälle die Anzahl der Verteilungen, wenn 11, 12, 13, ..., 20 Bäume in Reichweite stehen. Nutze die Befehle KOMBINATIONEN und KOMBINATIONEN2. Kannst du die Namen der Befehle erklären?

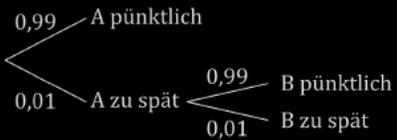




Fun186,187 I



Seite 186 | Aufgabe 1



$$P(A \text{ zu spät} | B \text{ zu spät}) = 0,01 \cdot 0,01 = 0,0001 = 0,01 \%$$

Seite 186 | Aufgabe 2

Zeichenübung.

- a) $P(\text{rot} | \text{gelb} | \text{grau}) = \frac{60}{360} \cdot \frac{30}{360} \cdot \frac{150}{360} \approx 0,0058 = 0,58 \%$
- b) $P(\text{dunkelblau} | \text{gelb} | \text{gelb}) = \frac{30}{360} \cdot \frac{30}{360} \cdot \frac{30}{360} \approx 0,0006 = 0,06 \%$
- c) $P(\text{rot} | \text{gelb} | \text{hellblau}) = \frac{60}{360} \cdot \frac{30}{360} \cdot \frac{90}{360} \approx 0,0035 = 0,35 \%$ unter Beachtung der Reihenfolge. Es gibt 6 Pfade mit dieser Farbkombination, also ergibt sich ohne Beachtung der Reihenfolge eine Wahrscheinlichkeit von 2,1 %.
- d) $P(\text{rot} | \text{blau} | \text{blau}) = \frac{60}{360} \cdot \frac{120}{360} \cdot \frac{120}{360} \approx 0,0185 = 1,85 \%$ unter Beachtung der Reihenfolge. Es gibt 3 Pfade mit dieser Farbkombination, also ergibt sich ohne Beachtung der Reihenfolge eine Wahrscheinlichkeit von 5,55 %.

Seite 186 | Aufgabe 3

- a) $P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90} = 1,11 \%$
- b) $P = \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{90} = 8,89 \%$
- c) $P = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10} = 10 \%$

Seite 186 | Aufgabe 4

- a) Falsch. Zahl und Adler haben weiterhin die gleiche Wahrscheinlichkeit, unabhängig vom Ausgang der vorherigen Würfe.
- b) Falsch. Gleiche Begründung wie in a).
- c) Richtig. Gleiche Begründung wie in a).

Seite 186 | Aufgabe 5

- a) Jeder Eintrag ist die Summe der beiden darüberstehenden Einträge.
- b) Die Bewegung verläuft wie in einem Galtonbrett (s. Seite 184 im Schülerbuch) von der Dreiecksspitze nach unten. Bei jedem Eintrag biegt man entweder nach links (L) oder nach rechts (R) ab. Beispiel: Zur 6 im Pascal'schen Dreieck gibt es genau 6 Wege: LLRR, LRLR, LRRL, RLLR, RLRL, RRLR. Das heißt, von 4 Schritten muss man genau 2-mal nach rechts gehen.
- c) Um von der Spitze des Dreiecks zum Eintrag $\binom{n}{k}$ zu gelangen, muss man n Schritte gehen und dabei genau k-mal nach rechts abbiegen. Die Anzahl solcher Wege entspricht nach Aufgabe b) dem Wert, der im Pascal'schen Dreieck an der gleichen Stelle steht wie $\binom{n}{k}$ im blauen Dreieck. Außerdem entspricht die Anzahl solcher Wege dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, denn aus n Kugeln (Schritten) werden k Kugeln (links) ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt.

Seite 186 | Aufgabe 6

- a) ① Die Einträge $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ liegen am Rand des Pascal'schen Dreiecks. Es gibt zu ihnen jeweils nur einen Weg.
- ② Die Einträge $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{n-1}$ liegen auf gleicher Stufe, jeweils einen Eintrag vom Rand entfernt. Aus dieser Symmetrie folgt: Vertauscht man in einem Weg, der zu $\binom{n}{1}$ führt, „links“ und „rechts“ miteinander, so erhält man einen Weg, der zu $\binom{n}{n-1}$ führt.
- ③ Die Gleichung ist eine Verallgemeinerung von ②.
- ④ Die Gleichung beschreibt die Aussage: Jeder Eintrag im Pascal'schen Dreieck ist die Summe der beiden darüberstehenden Einträge. Zum Beispiel: $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10 = \binom{5}{2}$
- b) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

Seite 187 | Aufgabe 7

- a) 10a: $\binom{28}{3} = 3276$ Möglichkeiten
- 10c: $\binom{30}{3} = 4060$ Möglichkeiten
- b) 10a: $\binom{15}{2} \cdot \binom{13}{2} = 105 \cdot 78 = 8190$ Möglichkeiten
- 10c: $\binom{14}{2} \cdot \binom{16}{2} = 91 \cdot 120 = 10920$ Möglichkeiten
- 10b: $\binom{27}{3} = 2925$ Möglichkeiten
- 10d: $\binom{28}{3} = 3276$ Möglichkeiten
- 10b: $\binom{12}{2} \cdot \binom{15}{2} = 66 \cdot 105 = 6930$ Möglichkeiten
- 10d: $\binom{16}{2} \cdot \binom{12}{2} = 120 \cdot 66 = 7920$ Möglichkeiten

Seite 187 | Aufgabe 8

- a) Individuelle Lösungen
- b) $P(\text{kein Geburtstag mehrfach}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 344 \cdot 343}{365^{23}} \approx 0,4927 = 49,27 \%$
- $P(\text{mindestens ein gemeinsamer Geburtstag}) = 1 - P(\text{kein Geburtstag mehrfach}) \approx 0,5073 > 50 \%$

Seite 187 | Aufgabe 9

- a) Es gibt $\binom{9}{4} = 70$ Möglichkeiten, aus 8 Schülerinnen und Schülern 4 ohne Zurücklegen auszuwählen. Von den 4 Jungen können auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten zwei ausgewählt werden, ebenso von den 4 Mädchen. Diese Auswahlen können auf $6 \cdot 6 = 36$ Weisen kombiniert werden. Es ergibt sich also: $P(\text{zwei Mädchen und zwei Jungen}) = \frac{36}{70} = \frac{18}{35} \approx 51,43 \%$
- b) Vier von vier Jungen können nur auf eine Weise ausgewählt werden, also: $P(\text{vier Jungen}) = \frac{1}{70} \approx 1,43 \%$



Fun186,187 II



Seite 187 | Aufgabe 10

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350 \text{ Zusammenstellungen}$$

Seite 187 | Aufgabe 11

Es gibt $8!$ Möglichkeiten, die Personen auf 8 Stühle zu platzieren. Jeweils 8 Anordnungen sind in Bezug auf die Sitznachbarn identisch (alle Stühle werden achtmal jeweils eine Position „weitergedreht“). Somit ist die Anzahl der Sitzordnungen

$$\frac{8!}{8} = 7! = 5040.$$

Seite 187 | Aufgabe 12

- Wenn bei n Personen jeder mit jedem anstößt, wird insgesamt $\binom{n}{2}$ -mal angestoßen. Es gibt jedoch kein n , für das $\binom{n}{2} = 25$ ist, denn $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{7}{2} = 21$, $\binom{8}{2} = 28$, $\binom{9}{2} = 36$, ...
- Vermutlich waren im Festsaal entweder 7 Personen (und Marina hat sich verzählt) oder 8 Personen (und Marina hat nicht jedes Gläserklingen gehört).

Seite 187 | Aufgabe 13

- Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge; $n = 10$ (Bäume), $k = 6$ (Tauben)
 $\binom{10}{6} = 210$ Möglichkeiten
- Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge; $n = 10$ (Bäume), $k = 6$ (Tauben)
 $\binom{10+6-1}{6} = 5005$ Möglichkeiten
- Individuelle Lösungen. Steht die Anzahl der Bäume in Zelle A2, dann sind es ohne Zurücklegen „=KOMBINATIONEN(A2;6)“ Möglichkeiten und mit Zurücklegen „=KOMBINATIONEN2(A2;6)“ Möglichkeiten. Eine Kombination ist eine Auswahl von k Objekten aus n Objekten, wobei die Reihenfolge in der Auswahl keine Rolle spielt. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt genau die Anzahl dieser Kombinationen an. Aus diesem Grund heißt der Befehl in Tabellenkalkulationen oft KOMBINATIONEN.

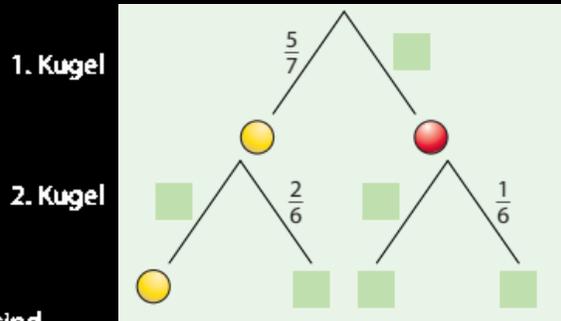
Gemischte Übungen **II**



Fun188,189

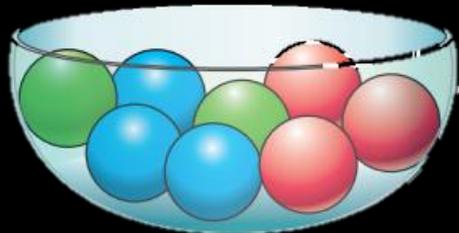
- Ein Skatspiel enthält 32 Karten, unter denen acht Herz-Karten sind. Es wird dreimal zufällig eine Karte gezogen und gleich wieder in den Stapel zurückgesteckt.
 - Zeichne ein dreistufiges Baumdiagramm.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei Herz-Karten gezogen werden.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine Herz-Karte gezogen wird.

- In einem Gefäß befinden sich fünf gelbe und zwei rote Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
 - Vervollständige das Baumdiagramm im Heft.
 - Entscheide, ob die erste gezogene Kugel ins Gefäß zurückgelegt wird.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln verschiedenfarbig sind.



- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Werfen zweier Würfel die Augensumme mindestens 11 ist. Zeichne ein Baumdiagramm, das nur die Pfade enthält, die zum gesuchten Ereignis gehören.

- Aus dem abgebildeten Gefäß mit acht Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
 - Zeichne ein Baumdiagramm.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zweimal dieselbe Farbe gezogen wird.



- Berechne die Werte.
 - $3!$
 - $\frac{10!}{9!}$
 - $\frac{n!}{(n-2)!}$
 - ${}_{10}P_2$
 - ${}_{10}C_0$
 - $\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$
- Bestimme die Anzahl der möglichen dreistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1, 2 und 3 bilden lassen, wenn
 - jede Ziffer genau einmal in jeder Zahl vorkommen soll,
 - die Ziffern mehrfach in jeder Zahl vorkommen können.
- Es werden unterschiedliche Situationen betrachtet, welche als das Ziehen aus einer Urne interpretiert werden können.
 - Entscheide, welche Situation als das Ziehen aus der Urne ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge interpretiert werden kann.
 - Schreibe für die in a) gefundenen Situationen die gesuchte Anzahl als Binomialkoeffizienten und berechne den Wert.

⊙ Anzahl aller Möglichkeiten 7 verschiedene Bücher in ein Bücherregal zu stellen

⊙ Anzahl der vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5

⊙ Von 15 Farbstiften werden 4 unterschiedliche Farben ausgewählt.

⊙ Anzahl der vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, bei denen jede Ziffer genau einmal auftritt

⊙ In einer Schublade sind 10 Paar Socken; es werden zufällig zwei Socken ausgewählt.

- Aus den Objekten sollen drei ausgewählt werden.

⊙ 1, 2, 3, 4, 5, 6

⊙ K, O, P, F

⊙ M, A, T, H, E

⊙ Schere, Stein, Papier

- Bestimme die Anzahl aller Möglichkeiten
- mit Berücksichtigung der Reihenfolge,
 - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.
- In einer kleinen Tüte befinden sich sieben Bonbons. Zwei Bonbons sind gelb und die restlichen rot. Nacheinander werden der Tüte drei Bonbons entnommen, ohne dass sie zurückgelegt werden.
 - Wie viele Möglichkeiten gibt es, der Tüte Bonbons zu entnehmen?
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit, ⊙ drei rote Bonbons zu ziehen, ⊙ zwei gelbe und einen roten Bonbon zu ziehen.
 - Bei einem Fußballspiel kommt es zum Elfmeterschießen.
 - Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, aus den elf Spielern einer Mannschaft fünf als Elfmeterschützen auszuwählen.
 - Gib an, wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge es für diese fünf Elfmeterschützen gibt.
 - Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim Lotto „6 aus 49“ mit einem abgegebenen Losschein
 - genau vier Richtige erzielt werden,
 - genau drei Richtige erzielt werden,
 - mindestens drei Richtige erzielt werden,
 - Laura und ihre Freundin Melissa gehören zu einem Handballteam. Unter allen 20 Mitgliedern des Teams werden zwei Freikarten für ein Bundesligaspiel verlost. Berechne mit einem Binomialkoeffizienten die Wahrscheinlichkeit, dass Laura und Melissa die beiden Karten gewinnen.

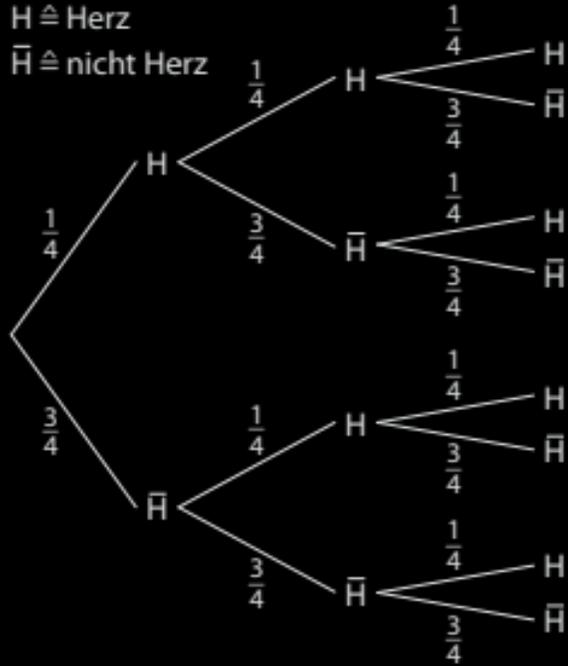


Fun188,189

S. 188, 1.

a) $H \hat{=}$ Herz

$\bar{H} \hat{=}$ nicht Herz

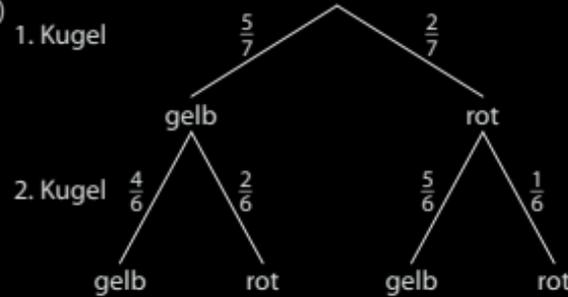


b) $P(\text{dreimal Herz}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \approx 0,0156 = 1,56\%$

c) $P(\text{genau einmal Herz}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \approx 0,4219 = 42,19\%$

S. 188, 2.

a) 1. Kugel

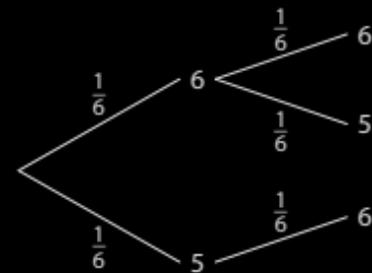


b) Die erste Kugel wird nicht zurückgelegt.

An den Wahrscheinlichkeiten ist zu erkennen, dass beim zweiten Zug nur noch 6 Kugeln vorhanden sind.

c) $P(\text{beide verschiedenfarbig}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{42} \approx 0,4762 = 47,62\%$

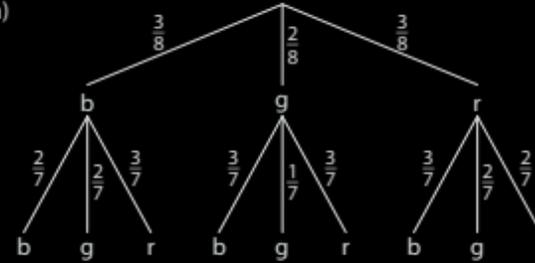
S. 188, 3.



$P(\text{Augensumme mindestens 11}) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 8,33\%$

S. 188, 4.

a)



b) $P(\text{zweimal dieselbe Farbe}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{14}{56} = 0,25 = 25\%$

S. 188, 5.

- a) 6
- b) 10
- c) $n \cdot (n - 1)$
- d) 45
- e) 1
- f) $\frac{2}{9}$

S. 188, 6.

- a) 6
- b) 27

S. 188, 7.

- a) ①, ③
- b) ①: $\binom{15}{4} = 1365$ ③: $\binom{20}{2} = 190$

S. 189, 8.

- a) ① 120 ② 24 ③ 60 ④ 6
- b) ① 20 ② 4 ③ 10 ④ 1

S. 189, 9.

a) Unter Beachtung der Reihenfolge gibt es 7 Möglichkeiten.

b) $P(r; r; r) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{60}{210} \approx 0,2857 = 28,57\%$

$P(\text{zweimal gelb, einmal rot}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{30}{210} \approx 0,1429 = 14,29\%$

S. 189, 10.

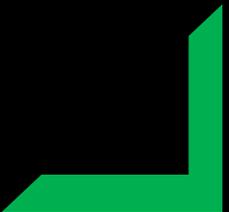
- a) 462
- b) 120

S. 189, 11.

- a) $0,00097 = 0,097\%$
- b) $0,01765 = 1,765\%$
- c) $0,01864 = 1,864\%$

S. 189, 12.

$0,00526 = 0,526\%$





Hausaufgabe

Mathematik

Fach

9./10. Klasse

Klasse

Wahrscheinlichkeit

Reihe

Das Urnenmodell, Wahrscheinlichkeiten

Thema

*

Lektion