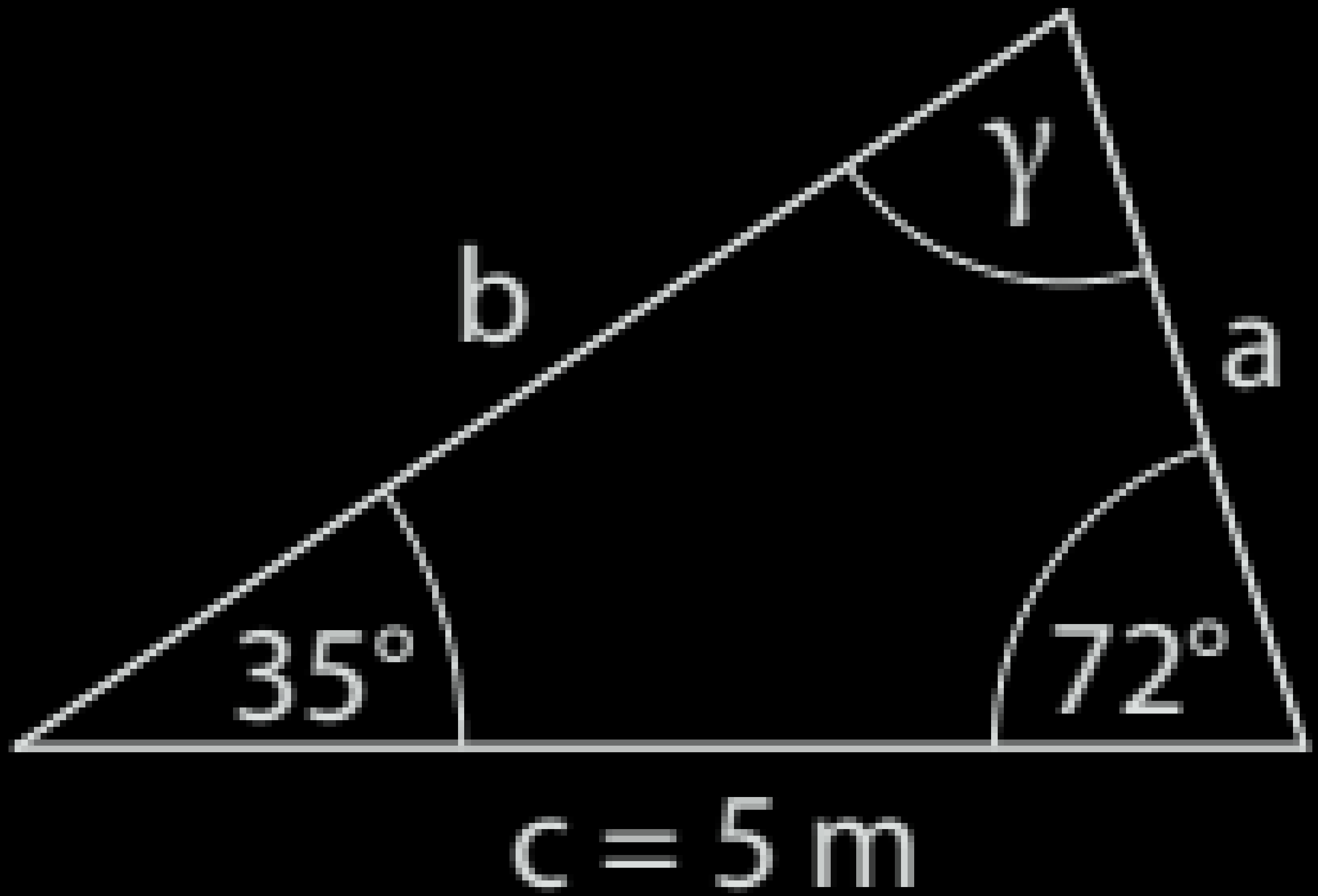
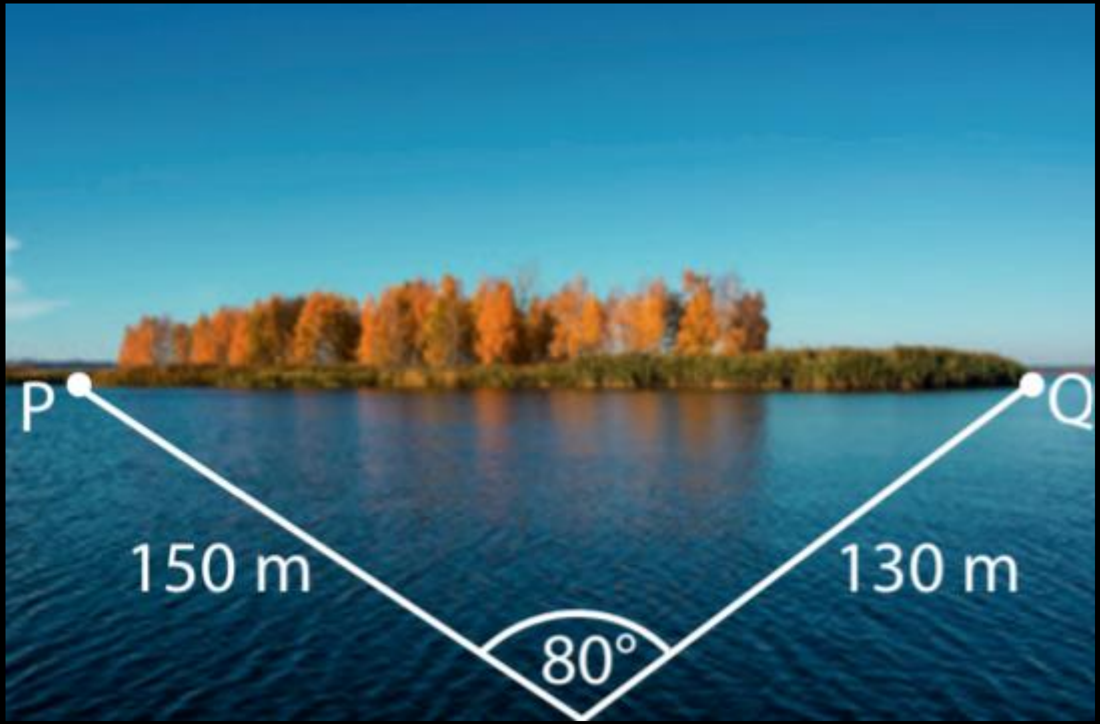
Mathematatik 10 Abels

Kopfübung



Wie lautet der Cosinussatz?

Die Länge einer schwer zugänglichen Flussinsel soll bestimmt werden. Dazu werden vom Ufer aus die beiden End-punkte P und Q angepeilt und die Entfernungen dorthin so-wie der eingeschlossene Winkel gemessen.



Wie lang ist die Insel?

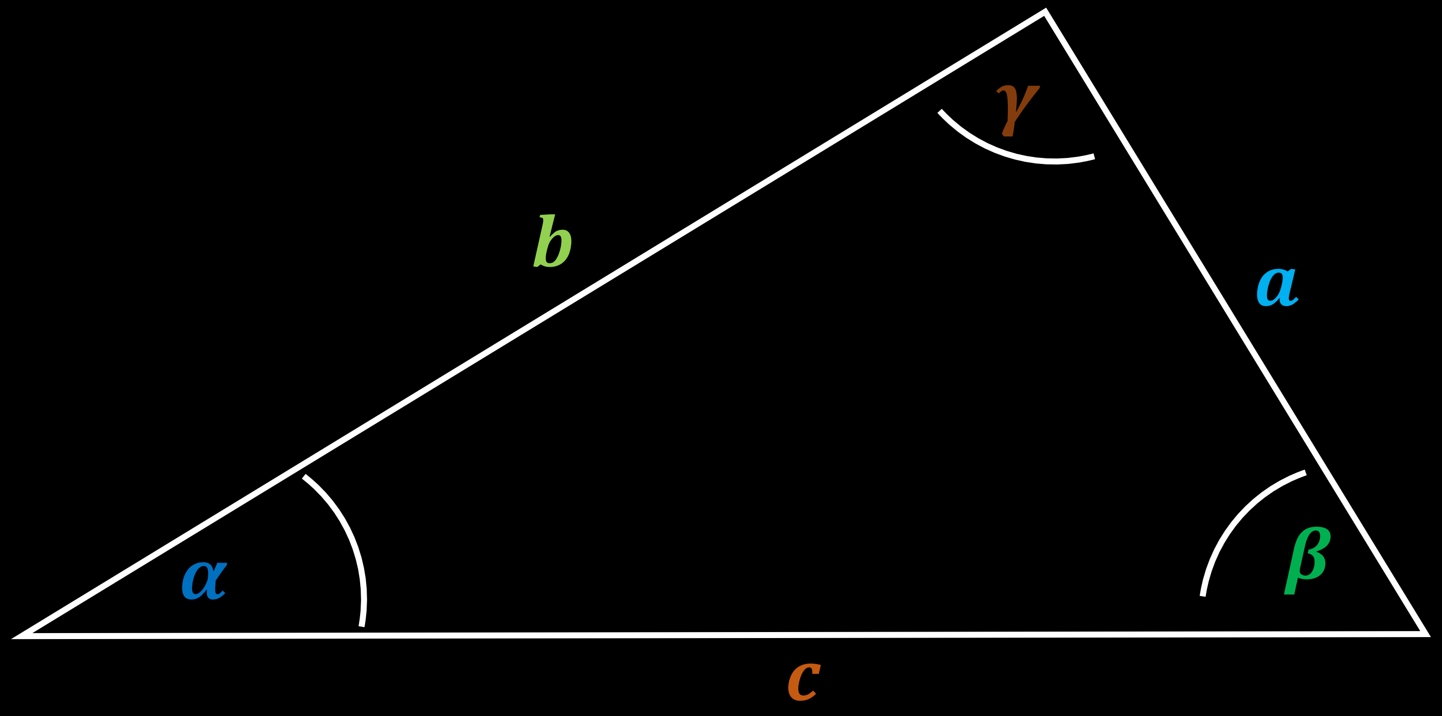
Cosinussatz

In beliebigen Dreiecken ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\gamma)$$



Fun102,103

1. In einem Dreieck ABC sind zwei Seitenlängen und ein Winkel gegeben. Berechne die fehlende Seitenlänge und die fehlenden Winkel.

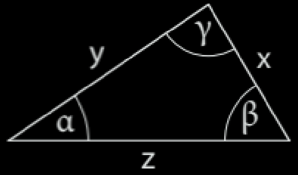
a) $a = 8{,}4\,\text{cm};\ \beta = 40°;\ c = 6{,}5\,\text{cm}$
b) $a = 5\,\text{cm};\ \gamma = 110°;\ b = 7{,}8\,\text{cm}$
c) $b = 5{,}5\,\text{cm};\ c = 2{,}7\,\text{cm};\ \alpha = 29°$
d) $a = 3{,}2\,\text{cm};\ b = 2{,}4\,\text{cm};\ \gamma = 66°$

2. In einem Dreieck ABC sind drei Seitenlängen gegeben. Berechne die fehlenden Winkel.

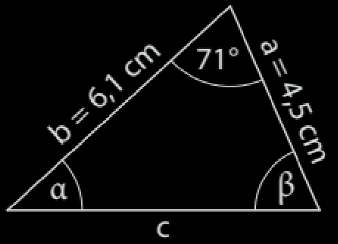
a) $a = 2\,\text{cm};\ b = 2{,}5\,\text{cm};\ c = 3\,\text{cm}$
b) $a = 6{,}8\,\text{cm};\ b = 4\,\text{cm};\ c = 5\,\text{cm}$
c) $a = 1{,}2\,\text{cm};\ b = 5\,\text{cm};\ c = 5{,}2\,\text{cm}$
d) $a = 6{,}5\,\text{cm};\ b = 4{,}9\,\text{cm};\ c = 10{,}6\,\text{cm}$

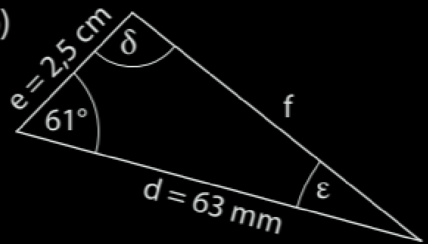
4. Ergänze mithilfe des Kosinussatzes zu einer wahren Aussage.

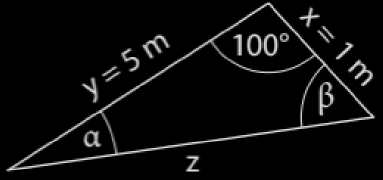
a) $y^2 = \ldots$
b) $\ldots = x^2 + y^2 - 2xy\ldots$
c) $\ldots = y^2 \ldots\ - 2z\ldots$
d) $\cos(\alpha) = \ldots$

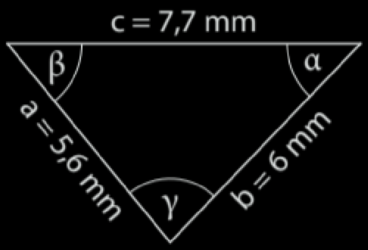


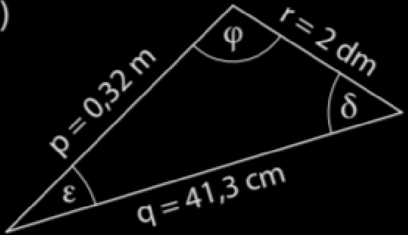
5. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks.

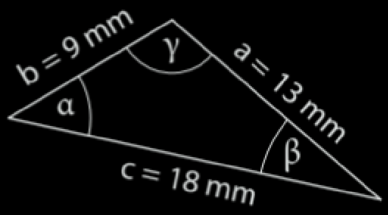
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Fun102,103

Seite 102 | Aufgabe 1

a) $b = \sqrt{(8{,}4\text{ cm})^2 + (6{,}5\text{ cm})^2 - 2 \cdot 8{,}4\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} \cdot \cos(40°)} \approx 5{,}4\text{ cm}$

$\gamma \approx \arccos\left(\frac{(8{,}4\text{ cm})^2+(5{,}4\text{ cm})^2-(6{,}5\text{ cm})^2}{2 \cdot 8{,}4\text{ cm} \cdot 5{,}4\text{ cm}}\right) \approx 50{,}7°$ $\qquad \alpha \approx 180° - 40° - 50{,}7° = 89{,}3°$

b) $c = \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (7{,}8\text{ cm})^2 - 2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 7{,}8\text{ cm} \cdot \cos(110°)} \approx 10{,}6\text{ cm}$

$\alpha \approx \arccos\left(\frac{(7{,}8\text{ cm})^2+(10{,}6\text{ cm})^2-(5\text{ cm})^2}{2 \cdot 7{,}8\text{ cm} \cdot 10{,}6\text{ cm}}\right) \approx 26{,}3°$ $\qquad \beta \approx 180° - 110° - 26{,}3° = 43{,}7°$

c) $a = \sqrt{(5{,}5\text{ cm})^2 + (2{,}7\text{ cm})^2 - 2 \cdot 5{,}5\text{ cm} \cdot 2{,}7\text{ cm} \cdot \cos(29°)} \approx 3{,}4\text{ cm}$

$\beta \approx \arccos\left(\frac{(2{,}7\text{ cm})^2+(3{,}4\text{ cm})^2-(5{,}5\text{ cm})^2}{2 \cdot 2{,}7\text{ cm} \cdot 3{,}4\text{ cm}}\right) \approx 128{,}4°$ $\qquad \gamma \approx 180° - 29° - 128{,}4° = 22{,}6°$

d) $c = \sqrt{(3{,}2\text{ cm})^2 + (2{,}4\text{ cm})^2 - 2 \cdot 3{,}2\text{ cm} \cdot 2{,}4\text{ cm} \cdot \cos(66°)} \approx 3{,}1\text{ cm}$

$\alpha \approx \arccos\left(\frac{(2{,}4\text{ cm})^2+(3{,}1\text{ cm})^2-(3{,}2\text{ cm})^2}{2 \cdot 2{,}4\text{ cm} \cdot 3{,}1\text{ cm}}\right) \approx 69{,}8°$ $\qquad \beta \approx 180° - 66° - 69{,}8° = 44{,}2°$

Seite 102 | Aufgabe 2

a) $\alpha = \arccos\left(\frac{(2{,}5\text{ cm})^2+(3\text{ cm})^2-(2\text{ cm})^2}{2 \cdot 2{,}5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}\right) \approx 41{,}4°$

$\beta \approx \arccos\left(\frac{(2\text{ cm})^2+(3\text{ cm})^2-(2{,}5\text{ cm})^2}{2 \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}\right) \approx 55{,}8°$

$\gamma \approx 180° - 41{,}4° - 55{,}8° = 82{,}8°$

b) $\alpha = \arccos\left(\frac{(4\text{ cm})^2+(5\text{ cm})^2-(6{,}8\text{ m})^2}{2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}\right) \approx 97{,}5°$

$\beta \approx \arccos\left(\frac{(6{,}8\text{ cm})^2+(5\text{ cm})^2-(4\text{ cm})^2}{2 \cdot 6{,}8\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}\right) \approx 35{,}7°$

$\gamma \approx 180° - 97{,}5° - 35{,}7° = 46{,}8°$

c) $\alpha = \arccos\left(\frac{(5\text{ cm})^2+(5{,}2\text{ cm})^2-(1{,}2\text{ cm})^2}{2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 5{,}2\text{ cm}}\right) \approx 13{,}3°$

$\beta \approx \arccos\left(\frac{(1{,}2\text{ cm})^2+(5{,}2\text{ cm})^2-(5\text{ cm})^2}{2 \cdot 1{,}2\text{ cm} \cdot 5{,}2\text{ cm}}\right) \approx 73{,}8°$

$\gamma \approx 180° - 13{,}3° - 73{,}8° = 92{,}9°$

d) $\alpha = \arccos\left(\frac{(4{,}9\text{ cm})^2+(10{,}6\text{ cm})^2-(6{,}5\text{ cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\text{ cm} \cdot 10{,}6\text{ cm}}\right) \approx 25{,}0°$

$\beta \approx \arccos\left(\frac{(6{,}5\text{ cm})^2+(10{,}6\text{ cm})^2-(4{,}9\text{ m})^2}{2 \cdot 6{,}5\text{ cm} \cdot 10{,}6\text{ cm}}\right) \approx 18{,}6°$

$\gamma \approx 180° - 25{,}0° - 18{,}6° = 136{,}4°$

Seite 103 | Aufgabe 4

a) $y^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cdot \cos(\beta)$

b) $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos(\gamma)$

c) $x^2 = y^2 + z^2 - 2zy \cdot \cos(\alpha)$

d) $\cos(\alpha) = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}$

Seite 103 | Aufgabe 5

a) $c \approx 6{,}3$ cm; $\alpha \approx 42{,}6°$; $\beta \approx 66{,}4°$

b) $d \approx 5{,}5$ cm; $\delta \approx 95{,}7°$; $\varepsilon \approx 23{,}3°$

c) $z \approx 5{,}3$ m; $\alpha \approx 69{,}2°$, $\beta \approx 10{,}8°$

d) $\alpha \approx 46{,}2°$; $\beta \approx 50{,}7°$; $\gamma \approx 83{,}1°$

e) $\delta \approx 49{,}1°$; $\varepsilon \approx 28{,}2°$; $\varphi \approx 102{,}7°$

f) $\alpha \approx 28{,}3°$; $\beta \approx 108{,}4°$; $\gamma \approx 43{,}2°$

Hausaufgabe

Fun104

10. Der Schatten eines Sandhaufens, der die Form eines schiefen Kegels hat, trifft 7,24 m entfernt vom Punkt B der Kreislinie im Punkt Q auf die Erdoberfläche. Die Mantellinien des Kegels sind um 72° bzw. 58° gegen die Erdoberfläche geneigt. Die Grundfläche des Kegels hat einen Durchmesser von 3,20 m.

a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{BS}$.

b) Ermittle, wie lang die Verbindungslinie vom Auftreffpunkt Q des Schattens zur Spitze S des Sandhaufens ist.

c) Berechne die Höhe des Sandbergs.