Mathematik 10 Abels

Kopfübung

- Sinus, Cosinus und Tangens
- Sinussatz
- Cosinussatz
- Einheitskreis
- Sinusfunktion
- Cosinusfunktion
- Bogenmaß

Videos

I Fun119/3

3. Im offenen Gelände können Winkel oft einfacher und genauer gemessen werden als große Entfernungen. Um die Höhe eines Windrads zu bestimmen, wird der Fußpunkt C von den Punkten A und B aus angepeilt. Anschließend wird die Strecke $\overline{AB}$ gemessen und die Spitze des Windrads von einem der Punkte aus angepeilt.
   Berechne die Höhe des Windrads.
   a) $\alpha = 71°$, $\beta = 49°$, $\varphi = 65°$ und $\overline{AB} = 35\,m$
   b) $\overline{AC} = 31{,}98\,m$, $\alpha = 63°$, $\varphi = 76{,}3°$ und $\overline{AB} = 5{,}2\,m$

II Fun119/6

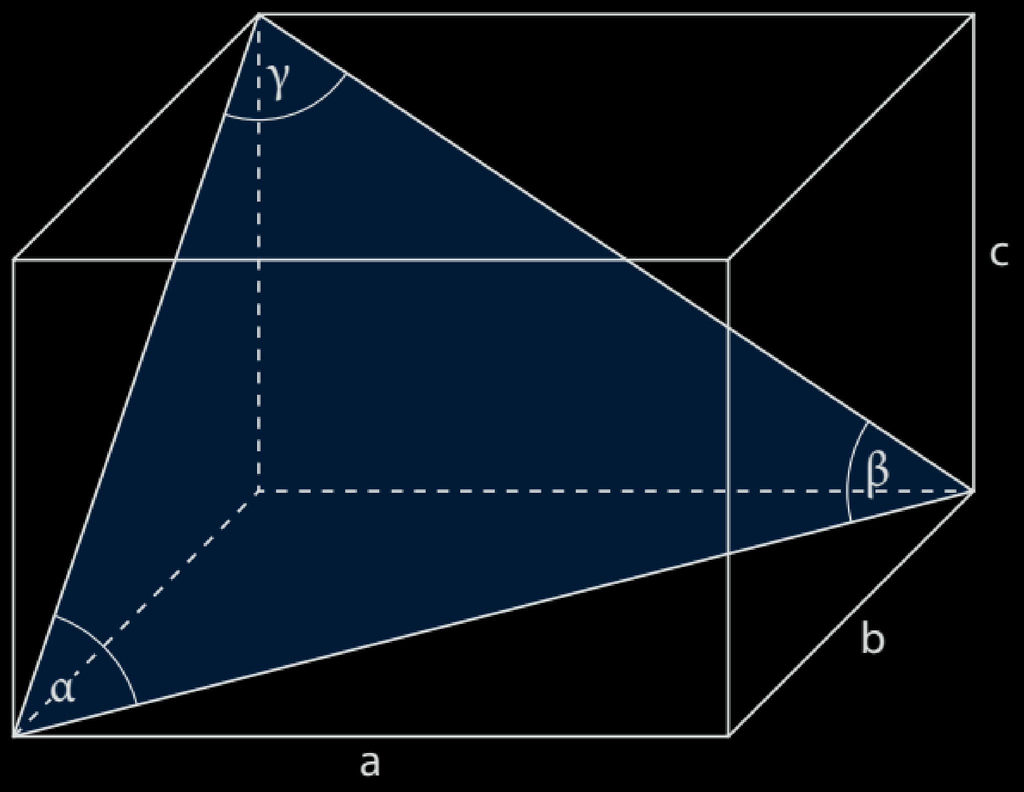
6. In einem Quader bilden die eingezeichneten Diagonalen der Seitenflächen ein Dreieck. Berechne die drei Innenwinkel dieses Dreiecks, wenn für die Kantenlängen des Quaders gilt:

a) $a = 6\,\text{cm};\ b = 5\,\text{cm};\ c = 4\,\text{cm}$

b) $a = 4\,\text{cm};\ b = 2a;\ c = \frac{1}{4}b$

c) $a = b = c$

d) $a = c;\ b = 4c$



III Fun121/11

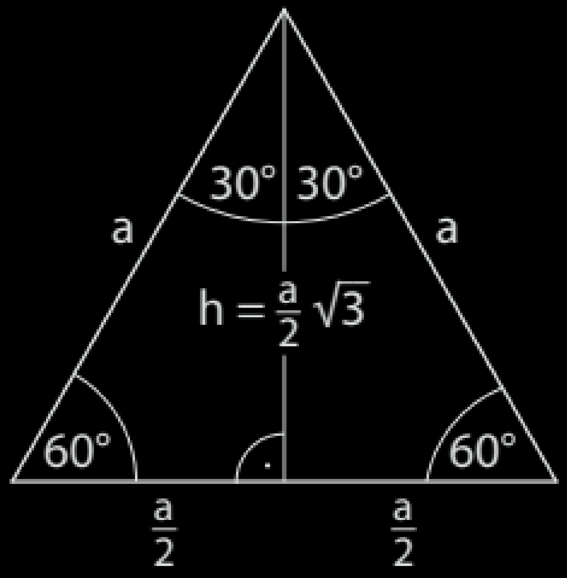
11. Um vom Ort A zum Ort B zu gelangen, musste bisher ein Umweg über den Ort P genommen werden. Daher wird eine neue Straße geplant, die geradlinig vom Ort A zum Ort B durch ein Waldgebiet führt. Ort A und Ort P sind 5 km und Ort B und Ort P 9 km voneinander entfernt. Die alten Verbindungsstraßen schließen einen Winkel von 43° ein.
Berechne die Länge der neuen Straße. Begründe, warum diese Aufgabe nicht mithilfe des Sinussatzes gelöst werden kann.

IV Fun121/12

12. Sinuswerte werden in der Regel mit dem Taschenrechner berechnet. Es gibt allerdings auch Möglichkeiten, Sinuswerte ausgewählter Winkel anhand geometrischer Überlegungen zu ermitteln.

a) Analysiere das Bild und weise mithilfe der Sinusdefinition nach, dass $\sin(30°) = 0{,}5$ und $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gilt.

b) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel 45° und beweise, dass $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gilt.



V Fun121/16

16. Begründe mithilfe von Verschiebungs- und Symmetrieeigenschaften der Sinus- und Kosinuskurve, dass für alle Winkel α die folgende Gleichung gilt: $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$

Gemischte Übungen

Fun122,123 I

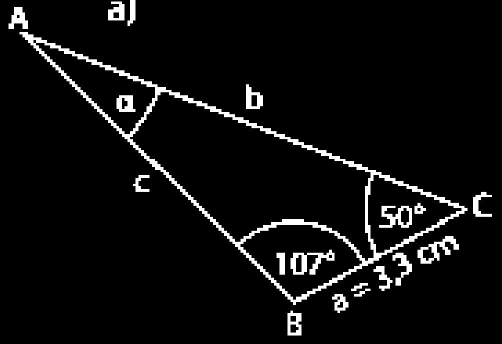
1. Berechne folgende Werte: $\sin(37°)$, $\cos(37°)$, $\tan(37°)$, $\sin(53°)$, $\cos(53°)$, $\tan(53°)$

2. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$.
   a) Berechne die fehlenden Seitenlängen.
      ① $b = 1\,cm$; $\alpha = 35°$ ② $a = 4{,}5\,cm$; $\beta = 42°$ ③ $a = 5{,}1\,cm$; $\alpha = 23°$
   b) Berechne die Winkel α und β.
      ① $c = 10\,cm$; $b = 6\,cm$ ② $c = 8{,}5\,cm$; $b = 3{,}5\,cm$ ③ $c = 17{,}3\,cm$; $b = 12{,}9\,cm$

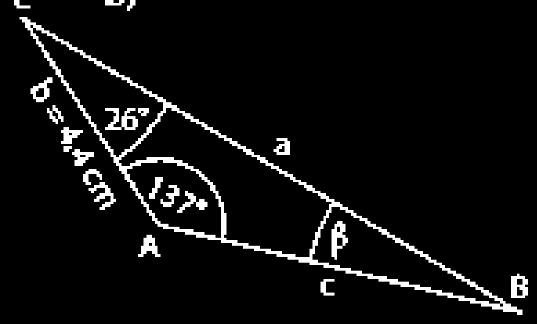
3. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\beta = 90°$.
   Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen.
   a) $b = 6\,cm$; $\alpha = 30°$ b) $c = 4\,cm$; $\gamma = 42°$ c) $a = 5{,}5\,cm$; $\alpha = 21°$
   d) $a = 4\,cm$; $b = 7\,cm$ e) $b = 3\,cm$; $c = 2\,cm$ f) $a = 7{,}7\,cm$; $b = 15{,}1\,cm$

4. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen.

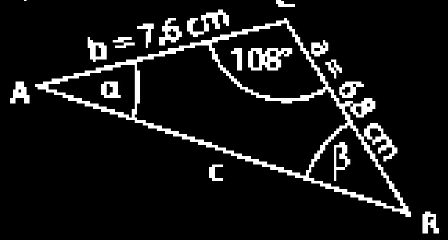
a)



b)



c)

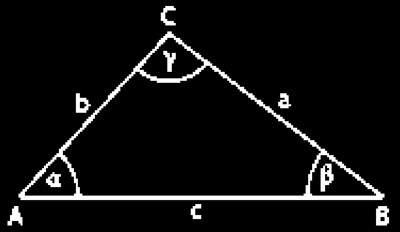


Fun122,123 **II**

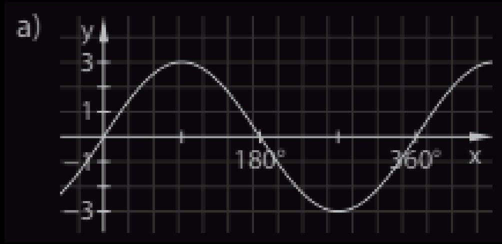
5. Für das Dreieck ABC gilt: $a = 12\,m$; $b = 5\,m$; $c = 13\,m$
   a) Konstruiere das Dreieck ABC maßstäblich und ermittle die Größen aller Innenwinkel durch Messen.
   b) Prüfe deine Ergebnisse rechnerisch. Begründe dein Vorgehen.

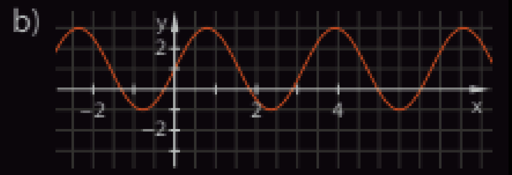
6. Der Schatten eines 1,80 m großen Snowboarders hat eine Länge von 2,70 m.
   a) Berechne, in welchem Winkel die Sonnenstrahlen auf die Ebene treffen.
   b) Berechne die Höhe eines Seilbahnmastes, wenn dieser zum gleichen Zeitpunkt einen 15 m langen Schatten wirft.

7. Ergänze im Heft zu einer wahren Aussage. Gib an, ob du den Sinussatz oder den Kosinussatz verwendet hast.
   a) $b^2 = \ldots$
   b) $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \ldots$
   c) $\frac{b}{a} = \ldots$
   d) $\ldots = \ldots + c^2 - 2a \ldots$
   e) $\ldots = \ldots b\cos(\gamma)$
   f) $c \cdot \sin(\beta) = \ldots$



8. Lies die Amplitude und die Periodenlänge der dargestellten periodischen Vorgänge ab.

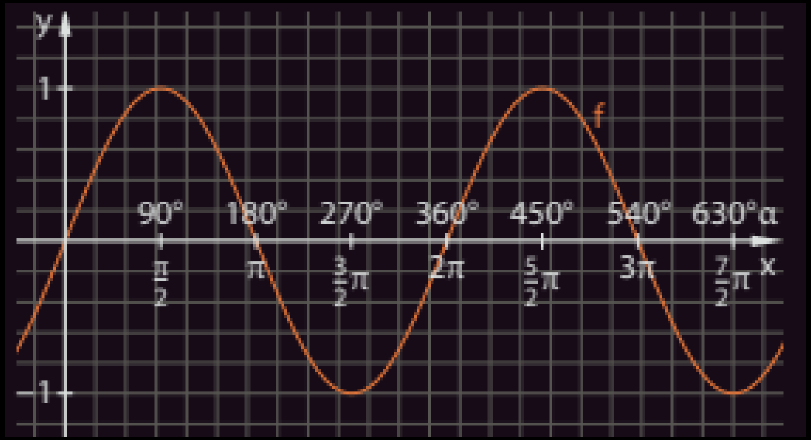




Fun122,123 III

9. a) Rechne die Winkel ins Bogenmaß um: $\alpha = 111°$; $\beta = 15°$; $\gamma = 0{,}75°$
   b) Rechne die Winkel ins Gradmaß um: $\alpha = \frac{1}{18}\pi$; $\beta = 2{,}25\,\pi$; $\gamma = 2{,}08$

10. Bestimme mithilfe der Abbildung
    a) die Sinuswerte von 240° und $\frac{4}{3}\pi$,
    b) die Winkel, deren Sinuswert 0,3 beträgt,
    c) die Winkel, deren Sinuswert −0,9 beträgt.



11. Berechne mit dem Taschenrechner die Sinus- und Kosinuswerte und begründe am Einheitskreis, warum ihr Vorzeichen positiv bzw. negativ ist.
    a) $\sin(12°)$ b) $\cos(260°)$ c) $\cos(800°)$ d) $\sin\left(\frac{8}{7}\pi\right)$ e) $\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$ f) $\sin(-205°)$

12. a) Zeichne den Graphen der Sinusfunktion für $-720° \leq \alpha \leq 720°$. Ermittle mithilfe der Zeichnung alle Winkel α im Gradmaß in diesem Bereich, für die $\sin(\alpha) = 0{,}75$ gilt.
    b) Ermittle alle Lösungen der Gleichung $\cos(x) = 0{,}2$ im Bogenmaß (Taschenrechner).

13. Prüfe die Aussagen. Begründe deine Entscheidung mithilfe des Einheitskreises.
    a) $\sin(360° - \alpha) = -\sin(\alpha)$ für $0° < \alpha < 90°$
    b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right)$ für $0° < \beta < 90°$
    c) $\sin(\varepsilon) = \sin(\pi + \varepsilon)$
    d) $\sin(360° + \delta) = \sin(180° - \delta)$ für $90° < \delta < 180°$

14. Begründe für $0° < \alpha < 90°$ mithilfe der Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktion.
    a) $\sin(\alpha) = \sin(360° + \alpha)$
    b) $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$

Fun122,123

S. 122, 1.
$\sin(37°) \approx 0{,}602$; $\cos(37°) \approx 0{,}799$; $\tan(37°) \approx 0{,}754$;
$\sin(53°) \approx 0{,}799$; $\cos(53°) \approx 0{,}602$; $\tan(53°) \approx 1{,}327$

S. 122, 2.
a) ① $a \approx 0{,}7$ cm; $c \approx 1{,}22$ cm
② $b \approx 4{,}95$ cm; $c \approx 6{,}06$ cm
③ $b \approx 12{,}01$ cm; $c \approx 13{,}05$ cm
b) ① $\alpha \approx 53{,}13°$; $\beta \approx 36{,}87°$
② $\alpha \approx 65{,}68°$; $\beta \approx 24{,}32°$
③ $\alpha \approx 41{,}78°$; $\beta \approx 48{,}22°$

S. 122, 3.
a) $a = 3$ cm; $c \approx 5{,}2$ cm; $\gamma = 60°$
b) $a \approx 4{,}4$ cm; $b \approx 6{,}0$ cm; $\alpha = 48°$
c) $b \approx 15{,}3$ cm; $c \approx 14{,}3$ cm; $\gamma = 69°$
d) $c \approx 5{,}7$ cm; $\alpha \approx 34{,}8°$; $\gamma = 55{,}2°$
e) $a \approx 2{,}2$ cm; $\alpha \approx 48{,}2°$; $\gamma = 41{,}8°$
f) $c \approx 13{,}0$ cm; $\alpha \approx 30{,}7°$; $\gamma = 59{,}3°$

S. 122, 4.
a) $b \approx 8{,}08$ cm; $c \approx 6{,}47$ cm; $\alpha = 23°$
b) $a \approx 10{,}26$ cm; $c \approx 6{,}59$ cm; $\beta = 17°$
c) $c \approx 11{,}66$ cm; $\beta \approx 38{,}31°$; $\alpha \approx 33{,}69°$

S. 122, 5.
a) maßstäbliche Zeichnung zum Beispiel mit $a = 3$ cm;
$b = 1{,}25$ cm; $c = 3{,}25$ cm;
Winkelgrößen: $\alpha \approx 67°$; $\beta \approx 23°$; $\gamma \approx 90°$
b) $13^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow$ Dreieck ist rechtwinklig
$\sin(\alpha) = \frac{3\,\text{cm}}{3{,}25\,\text{cm}} \rightarrow \alpha \approx 67{,}38°$
$\sin(\beta) = \frac{1{,}25\,\text{cm}}{3{,}25\,\text{cm}} \rightarrow \beta \approx 22{,}62°$
$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°$

S. 122, 6.
a) $\tan(\alpha) = \frac{1{,}80\,\text{m}}{2{,}70\,\text{m}} = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha \approx 33{,}69°$
b) $\tan(\alpha) = \frac{h}{15\,\text{m}} \rightarrow h = 10$ m

S. 122, 7.
a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ (Kosinussatz)
b) $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{c}$ (Sinussatz)
c) $\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$ (Sinussatz)
d) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ (Kosinussatz)
e) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ (Kosinussatz)
f) $c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\gamma)$ (Sinussatz)

S. 122, 8.
a) Periodenlänge $p = 360°$; Amplitude $a = 3$
b) Periodenlänge $p = \pi$; Amplitude $a = 2$

S. 123, 9.
a) $\alpha \approx 1{,}94$; $\beta \approx 0{,}26$; $\gamma \approx 0{,}013$
b) $\alpha = 10°$; $\beta = 405°$; $\gamma \approx 119{,}2°$

S. 123, 10.
a) $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin(240°) \approx -0{,}87$
b) 17,46°; 162,54°; 377,46°; 522,54°
c) 295,84°; 244,16°; 655,84°; 604,16°
(Es existieren bei b) und c) weitere Lösungen außerhalb des dargestellten Bereichs.)

S. 123, 11.
a) $\sin(12°) \approx 0{,}21$
b) $\cos(260°) \approx -0{,}17$
c) $\cos(800°) \approx 0{,}17$
d) $\sin\left(\frac{8}{7}\pi\right) \approx -0{,}43$
e) $\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \approx 0{,}71$
f) $\sin(-205°) \approx 0{,}42$

Sinuswerte für den I. und II. Quadranten sind positiv, für den III. und IV. Quadranten negativ. Kosinuswerte hingegen sind im I. und IV. Quadranten positiv, im II. und III. dagegen negativ.

S. 123, 12.
a) $\alpha_{1k} = 48{,}59° + k \cdot 360°$ ($k = -2, -1, 0, 1$)
$\alpha_{2k} = 131{,}41° + k \cdot 360°$ ($k = -2, -1, 0, 1$)
b) $\alpha_{1k} \approx 2 \cdot k \cdot \pi + 1{,}3695$ (k ganze Zahl)
$\alpha_{2k} \approx 2 \cdot k \cdot \pi - 1{,}3695$ (k ganze Zahl)

S. 123, 13.
a) Stimmt. Für $0° < \alpha < 90°$ liegt der Punkt, der auf dem Einheitskreis zu α gehört, im 1. Quadranten. Spiegelt man den Punkt entlang der x-Achse, so erhält man den Punkt, der zu $360° - \alpha$ gehört. Die y-Koordinaten beider Punkte sind also betragsmäßig gleich, aber mit unterschiedlichen Vorzeichen.
b) Der Winkel $\frac{\pi}{2} + \beta$ entspricht einer Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn plus β. Der Winkel $\frac{3}{2}\pi - \beta$ entspricht einer Dreivierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn minus β. Für $0° < \beta < 90°$ sind damit beide Winkel identisch.
c) Stimmt nicht. Gegenbeispiel: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (Vierteldrehung) und $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ (Dreivierteldrehung).
d) Stimmt. Für $90° < \delta < 180°$ liegt der Punkt, der auf dem Einheitskreis zu $360° + \delta$ gehört, im 2. Quadranten. Spiegelt man den Punkt entlang der y-Achse, so erhält man den Punkt, der zu $180° - \delta$ gehört. Die y-Koordinaten beider Punkte sind also identisch.

S. 123, 14
a) Es wurde genau eine Periode der Sinusfunktion durchlaufen. Daher sind die Werte gleich.
b) Die Kosinusfunktion ist punktsymmetrisch zu $(90°|0)$. Die Funktionswerte unterscheiden sich daher nur durch ihr Vorzeichen.

Hausaufgabe

Mathematik *Fach*

9./10. Klasse *Klasse*

Trigonometrie *Reihe*

* *Thema*

* *Lektion*