Mathematik Q1 Abels

Kopfübung

- Bestimmen Sie die Ableitung von f.

a) $f(x) = x^3 + x$

b) $f(x) = \sin(\pi x)$

c) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$

Regeln aus der Differentialrechnung

Notwendige Bedingung für Extrema:
Liegt bei x_E ein lokales Extremum von f, so gilt die Bedingung

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:
Liegt bei x_W ein Wendepunkt von f, so gilt die Bedingung

Hinreichende Bedingung für Extrema:
Gilt $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$, so liegt bei x_E ein lokales Extremum von f.
⇒ Maximum
⇒ Minimum

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte:
Gilt $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, so liegt bei x_W ein Wendepunkt von f.
⇒ Rechts-Links-WP
⇒ Links-Rechts-WP

Gleichung der Tangente von f bei x_0:
$y_T(x) =$

Gleichung der Normalen von f bei x_0:
$y_N(x_0) =$

Allgemeine Ableitungsregeln:
Summenregel:
Faktorregel:
Konstantenregel:
Kettenregel:
Lineare Kettenregel:
Produktregel:

Spezielle Ableitungsregeln:
Potenzregel:
Reziprokenregel:
Wurzelregel:
Exponentialregeln:
Trigonometrische Regeln:

Regeln aus der Differentialrechnung

Notwendige Bedingung für Extrema:
Liegt bei x_E ein lokales Extremum von f, so gilt die Bedingung $f'(x_E) = 0$.

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:
Liegt bei x_W ein Wendepunkt von f, so gilt die Bedingung $f''(x_W) = 0$.

Hinreichende Bedingung für Extrema:
Gilt $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$, so liegt bei x_E ein lokales Extremum von f.
$f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ Maximum
$f''(x_E) > 0 \Rightarrow$ Minimum

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte:
Gilt $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, so liegt bei x_W ein Wendepunkt von f.
$f'''(x_W) > 0 \Rightarrow$ Rechts-Links-WP
$f'''(x_W) < 0 \Rightarrow$ Links-Rechts-WP

Gleichung der Tangente von f bei x_0:
$y_T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Gleichung der Normalen von f bei x_0:
$y_N(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Allgemeine Ableitungsregeln:

Summenregel:	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
Faktorregel:	$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
Konstantenregel:	$(c)' = 0$
Kettenregel:	$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Lineare Kettenregel:	$[f(ax + b)]' = f'(ax + b) \cdot a$
Produktregel:	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Spezielle Ableitungsregeln:

Potenzregel:	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \; n \in \mathbb{Z}$
Reziprokenregel:	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Wurzelregel:	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Exponentialregeln:	$(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$
Trigonometrische Regeln:	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

Big84

1. Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema und Wendepunkte.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4$ d) $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3$

3. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 1$

4. Berechnen Sie die Steigung und den Steigungswinkel α von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = e^{0,5x}$, $x_0 = 0$

Big84

84

1. a) $f'(x)=x^2-4x+3$, $f''(x)=2x-4$, $f'''(x)=2$

Extrema: $f'(x)=0$: $\begin{cases} x=1,\ f''(1)=-2<0 \Rightarrow H(1\,|\,\frac{4}{3}) \\ x=3,\ f''(3)=2>0 \Rightarrow T(3\,|\,0) \end{cases}$

Wendepunkt: $f''(x)=0$, $x=2$, $f'''(2)=2>0 \Rightarrow R-L-WP$ $W(2\,|\,\frac{2}{3})$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$, $f''(x)=x+2$, $f'''(x)=1$

Extrema: $f'(x)=0$: $\begin{cases} x=0,\ f''(0)=2>0 \Rightarrow T(0\,|\,0) \\ x=-4,\ f''(-4)=-2<0 \Rightarrow H(-4\,|\,\frac{16}{3}) \end{cases}$

Wendepunkt: $f''(x)=0$, $x=-2$, $f'''(-2)=1>0 \Rightarrow R-L-WP$ $W(-2\,|\,\frac{8}{3})$

c) $f'(x)=2x^3-6x$, $f''(x)=6x^2-6$, $f'''(x)=12x$

Extrema: $f'(x)=0$: $\begin{cases} x=0,\ f''(0)=-6<0 \Rightarrow H(0\,|\,4) \\ x=\pm\sqrt{3},\ f''(\pm\sqrt{3})=12>0 \Rightarrow T(\pm\sqrt{3}\,|\,-\frac{1}{2}) \end{cases}$

Wendepunkt: $f''(x)=0$, $x=\pm1$: $\begin{cases} f'''(-1)=-12<0 \Rightarrow L-R-WP & W(-1\,|\,\frac{1}{2}) \\ f'''(1)=12>0 \Rightarrow R-L-WP & W(1\,|\,\frac{3}{2}) \end{cases}$

d) $f'(x)=-4x^3-8x^2$, $f''(x)=12x^2-16x$, $f'''(x)=24x-16$

Extrema: $f'(x)=0$: $\begin{cases} x=0,\ f''(0)=0 \\ x=2,\ f''(2)=16>0 \Rightarrow T(2\,|\,-\frac{16}{3}) \end{cases}$

Wendepunkt: $f''(x)=0$: $\begin{cases} x=0,\ f'''(0)=-16<0 \Rightarrow L-R-WP & W(0\,|\,0) \\ x=\frac{4}{3},\ f'''(\frac{4}{3})=16>0 \Rightarrow R-L-WP & W(\frac{4}{3}\,|\,-\frac{256}{81}) \end{cases}$

2. a) $f'(x)=3x^2+1$ b) $f'(x)=\pi\cdot\cos(\pi x)$ c) $f'(x)=6\cdot e^{2x}$ d) $f'(x)=-\frac{4}{x^3}+1$

3. a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$: $\begin{cases} t(x)=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+1 \\ n(x)=4(x-2)+\frac{1}{2}=4x-7{,}5 \end{cases}$

b) $f'(x)=-e^{-x}$: $\begin{cases} t(x)=-\frac{1}{e}(x-1)+\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}x+\frac{2}{e} \\ n(x)=e(x-1)+\frac{1}{e}=ex-e+\frac{1}{e} \end{cases}$

4. a) $f'(x)=2x+2$, $m=f'(1)=4 \Rightarrow \alpha\approx 76°$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}e^{0{,}5x}$, $m=f'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha\approx 26{,}6°$

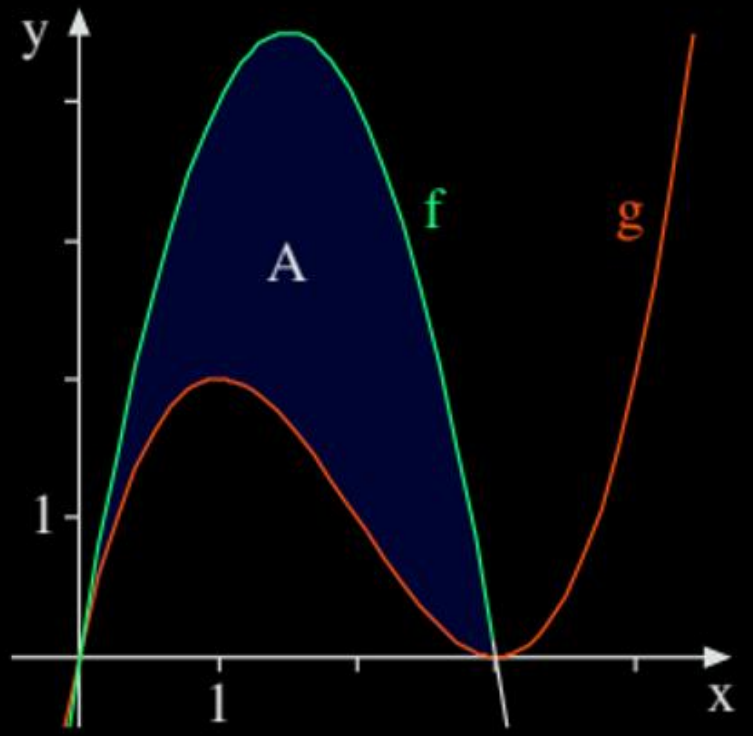
Big86

Beispiel: Abstrakte Kurvenuntersuchung

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -2x^2 + 6x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$, deren Graphen abgebildet sind.

a) Untersuchen Sie g auf Extrema und Wendepunkte.

b) Berechnen Sie die Schnittstellen von f und g.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, welche von f und g im ersten Quadranten umrandet wird.

d) Der Ursprung O(0|0), der Punkt Q(x|0) und der Punkt P(x|g(x)) (0 < x < 3) sind Ecken eines bei Q rechtwinkligen Dreiecks. Für welchen Wert von x ist der Dreiecksinhalt maximal?