Mathematik Q1 Abels

Kopfübung

- Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen von f an der Stelle x_0.

  a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2$ b) $f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = 1$

Ganzrationale und trigonometrische **Funktionen**

!

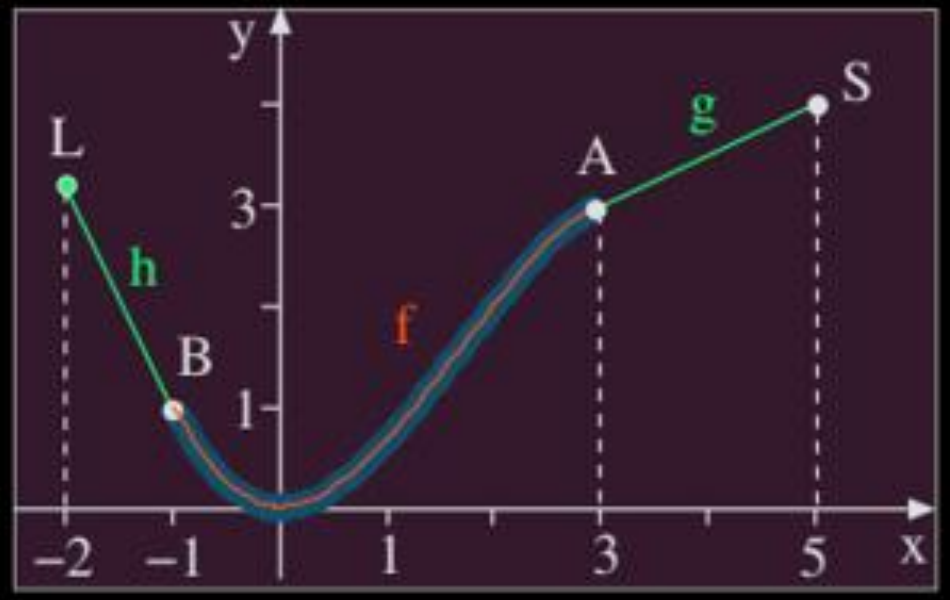
Big85

Beispiel: Minigolf/Tangenten

Beim Minigolf soll eine gebogene Laufröhre durchlaufen werden, deren Mittelkurve $f(x) = -\frac{1}{6}(x^3 - 5x^2)$ ist.

a) Der Spieler wählt den Startpunkt S(5|4) und schlägt den Ball nach A(3|3). Trifft der Ball die Kurve f dort tangential?

b) Der Ball verlässt das Rohr im Punkt B(−1|1) tangential. Wie groß muss y sein, damit der Ball das Loch bei L(−2|y) trifft?



Big85

Lösung zu a:
Wir bestimmen zunächst die Steigung der Bahngeraden g durch die Punkte S und A mit Hilfe des Differenzenquotienten. Sie beträgt $m = \frac{1}{2}$. Die Steigung von f im Punkt A beträgt $f'(3) = \frac{1}{2}$. Damit liegt Übereinstimmung vor. Die Gerade g trifft tangential auf die Mittelkurve f der Röhre.

Lösung zu b:
Wir bestimmen nun die Gleichung der Tangente t von f im Punkt B $(-1|1)$. Dazu wenden wir die allgemeine Tangentengleichung $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ an.
Wir erhalten $t(x) = -\frac{13}{6}x - \frac{7}{6}$.
Nun berechnen wir $t(-2) = \frac{19}{6}$.
Daher muss $y = \frac{19}{6}$ gewählt werden, d. h. $L\left(-2\left|\frac{19}{6}\right.\right)$ ist der gesuchte Einlochpunkt.

Steigung der Geraden g

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{4 - 3}{5 - 3} = \frac{1}{2}$$

Steigung der Funktion f bei x = 3

$$f'(x) = -\frac{1}{6}(3x^2 - 10x)$$
$$f'(3) = \frac{1}{2}$$
$\Rightarrow$ g ist Tangente an f bei $x = 3$

Gleichung der Tangente t bei x = −1

Ansatz: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$t(x) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1)$$
$$= -\frac{13}{6}(x + 1) + 1$$
$$= -\frac{13}{6}x - \frac{7}{6}$$

Berechnung des y-Wertes von L

$$t(-2) = -\frac{13}{6} \cdot (-2) - \frac{7}{6} = \frac{19}{6}$$
$\Rightarrow$ Einlochpunkt: $L\left(-2\left|\frac{19}{6}\right.\right)$

Big86

Beispiel: Abstrakte Kurvenuntersuchung

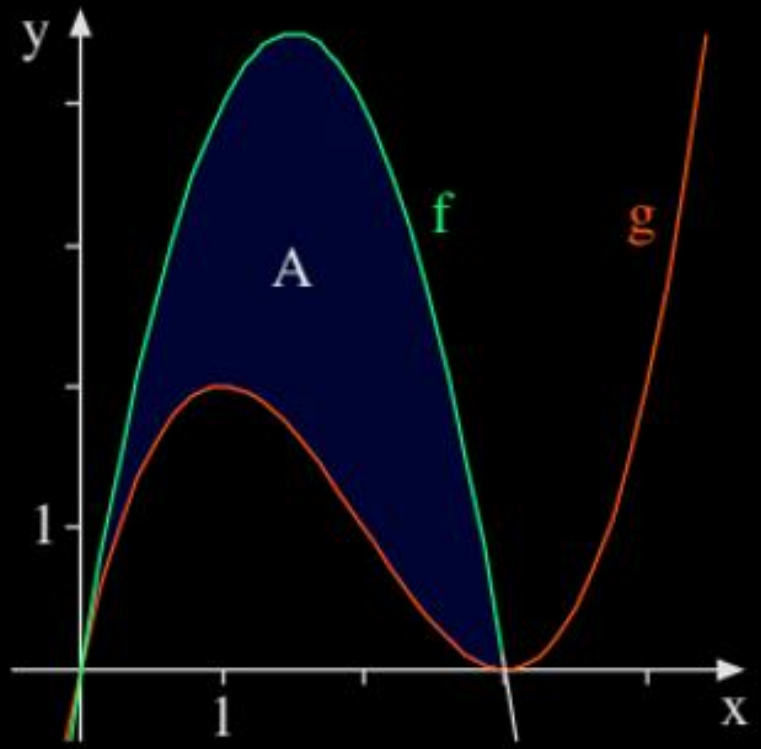
Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -2x^2 + 6x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$, deren Graphen abgebildet sind.

a) Untersuchen Sie g auf Extrema und Wendepunkte.

b) Berechnen Sie die Schnittstellen von f und g.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, welche von f und g im ersten Quadranten umrandet wird.

d) Der Ursprung $O(0|0)$, der Punkt $Q(x|0)$ und der Punkt $P(x|g(x))$ $(0 < x < 3)$ sind Ecken eines bei Q rechtwinkligen Dreiecks. Für welchen Wert von x ist der Dreiecksinhalt maximal?



Big86

Lösung zu a:
Wir bestimmen zunächst g', g'' und g'''.
$g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$
$g''(x) = 3x - 6$
$g'''(x) = 3$
Mit der notwendigen Bedingung $g'(x) = 0$ errechnen wir die Extremstellen von g. Sie liegen bei $x = 3$ und $x = 1$.
Die Überprüfung dieser potentiellen Extremstellen mit dem g''-Kriterium liefert den Tiefpunkt $T(3|0)$ und den Hochpunkt $H(1|2)$.

Analog errechnen wir mit der notwendigen Bedingung $g''(x) = 0$ die Lage der Wendestelle von g bei $x = 2$.
Die Überprüfung mit dem hinreichenden g'''-Kriterium ergibt einen Rechts-Links-Wendepunkt $W(2|1)$.

Lösung zu b:
Zur Berechnung der Schnittstellen von f und g muss die Ansatzgleichung $f(x) = g(x)$ gelöst werden. Die rechts dargestellte Rechnung liefert als Lösung drei Schnittstellen bei $x = -1$, $x = 0$ und $x = 3$.

Lösung zu c:
Um den Inhalt von A zu berechnen, nutzen wir die Differenzfunktion von f und g. Sie lautet $d(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$. Durch Integration der Differenzfunktion d in den Grenzen von 0 bis 3 erhalten wir den Inhalt von A.

Resultat: $A = 5{,}625$ FE

Extrema von g:

$$g'(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - 6x + \tfrac{9}{2} = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$$
$x = 3,\ y = 0;\ g''(3) = \ \ 3 > 0 \Rightarrow$ Min
$x = 1,\ y = 2;\ g''(1) = -3 < 0 \Rightarrow$ Max

Wendepunkt von g

$$g''(x) = 3x - 6 = 0$$
$$x = 2,\ y = 1$$
$g'''(2) = 3 > 0 \ \Rightarrow$ RL-Wp $W(2|1)$

Schnittstellen von f und g

$$f(x) = g(x)$$
$$-2x^2 + 6x = \tfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{2}x$$
$$\tfrac{1}{2}x^3 - x^2 - \tfrac{3}{2}x = 0$$
$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$$
$x = 0$ bzw. $x^2 - 2x - 3 = 0$
$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$
$x = -1,\ x = 3$

Flächeninhalt von A

$$A = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int_0^3 \left(-\tfrac{1}{2}x^3 + x^2 + \tfrac{3}{2}x\right)dx$$
$$= \left[\left(-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2\right)\right]_0^3$$
$$= \left(-\tfrac{81}{8} + 9 + \tfrac{27}{4}\right) - (0) = \tfrac{45}{8} = 5{,}625$$

Lösung zu d:
Die Abbildung rechts verdeutlicht die Lage des eingesperrten Dreiecks.

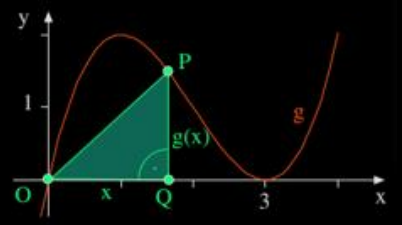
Der Flächeninhalt A des Dreiecks wird nach der altbekannten Formel $A = \frac{1}{2}g \cdot h$ bestimmt (g: Grundlinie; h: Höhe). Mit der Grundlinie x und der Höhe $g(x)$ folgt also:
$A = \frac{1}{2}x \cdot g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2$

Die notwendige Bedingung für ein Extremum von A lautet $A'(x) = 0$. Damit ergibt sich die rechts aufgeführte Rechnung.

Bei $x = 0$ und $x = 3$ liegen offensichtlich Minimalstellen von A. Auf die hinreichende Bedingung für Extrema kann verzichtet werden, da die Lage völlig klar ist.

Bei $x = 1{,}5$ liegt das Maximum von A.
Für die maximale Fläche gilt daher:
$A_{MAX} = A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{64} \approx 1{,}27$

Skizze des eingesperrten Dreiecks



Extremalrechnung

$$A'(x) = 0$$
$$x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + \tfrac{9}{2}x = 0$$
$$x \cdot \left(x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{9}{2}\right) = 0$$
$x = 0$ bzw. $x = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{9}{2}}$
$x = 0$ bzw. $x = 3$ bzw. $x = 1{,}5$

$\Rightarrow$ Maximum von A bei $x = 1{,}5$
$A_{MAX} = A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{64} \approx 1{,}27$

Big90

Beispiel: Hochwasser

Bei einem Unwetter kann die Strömungsrate in einer überfluteten Straße durch $s(t) = 600 \cdot (9t^2 - t^3)$ erfasst werden.

(t: Zeit in Std.; s: Strömungsrate in m^3/h)

Skizzieren Sie den Graphen von s für $0 \leq t \leq 9$.

Wann ist die Strömung am stärksten?

Wann erhöht sich die Strömungsrate am schnellsten?

Welche Wassermenge passiert die Straße insgesamt?