Mathematik Q1 Abels

Kopfübung

- $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 2x\right) =$
- $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 2x\right) =$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{0,5x}\right) =$
- $\lim_{x \to -\infty} \left(e^{0,5x}\right) =$

Untersuchung von Exponentialfunktionen

Bestimme das Grenzverhalten und begründe es anhand …
a)… einer Wertetabelle / durch Einsetzen.
b)… des Graphen.
c)… der Funktionsgleichung.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(x^2 - 2x \right) \cdot e^{0{,}5x} \right) = \cdots$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\left(x^2 - 2x \right) \cdot e^{0{,}5x} \right) = \cdots$$

Untersuchung von Exponentialfunktionen

Grenzverhalten

$$\lim_{x \to +\infty} ((\dots) \cdot e^{\cdots}) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} ((\dots) \cdot e^{\cdots}) =$$

$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	0	0
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

, da die e-Funktion dominiert
, da die e-Funktion dominiert
, da die e-Funktion dominiert

!

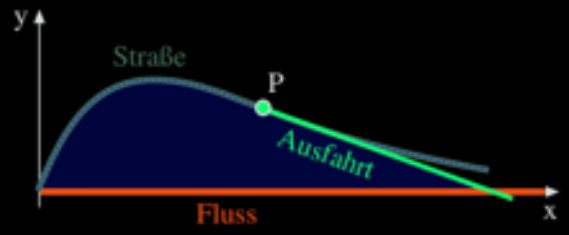
Big109-111

Beispiel: Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$. Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Prüfen Sie, wie sich die Funktionswerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ verhalten. Zeichnen Sie den Graphen von f für $-1 \le x \le 3$.

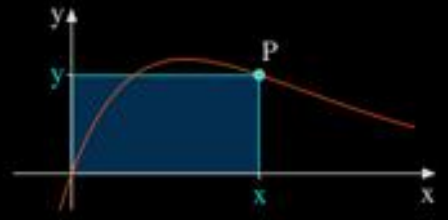
Beispiel: Tangente

Die Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ stellt eine Straße dar. Im Punkt $P\left(2 \middle| \frac{2}{e}\right)$ soll tangential eine gerade Ausfahrt abgehen.
Wie lautet die Gleichung der Ausfahrt?
Wo überquert die Ausfahrt den Fluss?



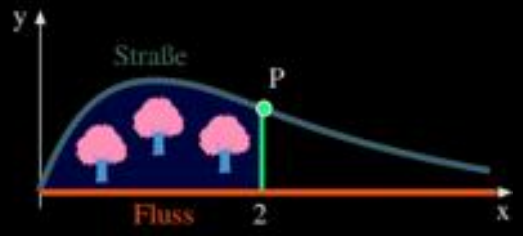
Beispiel: Extremalproblem

Der Punkt $P(x|y)$ mit $x > 0$ liegt im ersten Quadranten auf dem Graphen von $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ und ist die rechte obere Ecke eines achsenparallelen Rechtecks, dessen linke untere Ecke der Ursprung ist. Wie muss die Punktabszisse x gewählt werden, wenn der Flächeninhalt A des Rechtecks maximal werden soll?



Beispiel: Flächeninhalt

Die Straße $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, der Fluss längs der x-Achse und der vertikale Verbindungsweg vom Punkt P zum Fluss begrenzen ein Grundstück, das mit Obstbäumen bepflanzt werden soll (1 LE = 100 m).
Ein Obstbaum benötigt $20\,m^2$. Wie viele Bäume können gepflanzt werden? Zeigen Sie zunächst, dass $F(x) = (-1 - x) \cdot e^{1-x}$ eine Stammfunktion von f ist.



Big109-111

Beispiel: Kurvendiskussion

1. Ableitungen:
Wir bestimmen die ersten drei Ableitungen, die wir zur Untersuchung auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte benötigen.
Dabei wenden wir die Produktregel und die Kettenregel an.

2. Nullstellen:
Die notwendige und hinreichende Bedingung für Nullstellen lautet $f(x) = 0$.
Wir finden die Nullstelle bei $x = 0$.

3. Extrema:
Die notwendige Bedingung lautet $f'(x) = 0$.
Dies führt auf ein mögliches Extremum bei $x = 1$ mit dem y-Wert $y = 1$.
Die Überprüfung mit Hilfe der zweiten Ableitung zeigt, dass es sich um ein Maximum handelt: Hochpunkt $H(1|1)$.

4. Wendepunkte:
Die notwendige Bedingung lautet $f''(x) = 0$.
Damit ergibt sich ein möglicher Wendepunkt bei $x = 2$, $y = \frac{2}{e}$.
Die Überprüfung mit Hilfe der dritten Ableitung ergibt, dass es sich um einen Rechts-Links-Wendepunkt handelt: $W\left(2\middle|\frac{2}{e}\right)$.

5. Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Wir verwenden Wertetabellen, um das Verhalten von f für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ zu untersuchen. Wir erhalten folgende Resultate:
$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{1-x} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot e^{1-x} = -\infty$

Ableitungen
$f(x) = x \cdot e^{1-x}$
$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = (1-x) \cdot e^{1-x}$
$f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x) \cdot (-e^{1-x})$
$= (x-2) \cdot e^{1-x}$
$f'''(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (x-2) \cdot (-e^{1-x})$
$= (3-x) \cdot e^{1-x}$

Nullstellen
$f(x) = 0$
$x \cdot e^{1-x} = 0$
$x = 0$, da $e^{1-x} > 0$

Extrema
$f'(x) = 0$
$(1-x) \cdot e^{1-x} = 0$
$1 - x = 0$, da $e^{1-x} > 0$
$x = 1$, $y = 1$
Überprüfung mit f'':
$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum

Wendepunkte
$f''(x) = 0$
$(x-2) \cdot e^{1-x} = 0$
$x - 2 = 0$, da $e^{1-x} > 0$
$x = 2$, $y = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$
$f'''(2) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow$ R-L-Wendepunkt

Verhalten für $x \to \infty$

x	1	5	10	$\to \infty$
f(x)	1	0,09	0,0012	$\to 0$

Verhalten für $x \to -\infty$

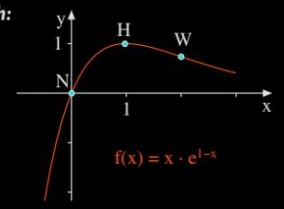
x	−1	−5	−10	$\to -\infty$
f(x)	−7,39	$-2 \cdot 10^3$	$-6 \cdot 10^5$	$\to -\infty$

6. Graph von f:
Der Graph von f verläuft rechtsgekrümmt durch den Ursprung bis zum Hochpunkt $H(1|1)$. Dann fällt er weiterhin rechtsgekrümmt bis zum Wendepunkt $W(2|0{,}74)$. Anschließend fällt er linksgekrümmt weiter und schmiegt sich dabei von oben an die x-Achse, der er beliebig nahe kommt.

Beispiel: Tangente

Wir verwenden als Ansatz die allgemeine Gleichung der Tangente von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.
Wir kennen $x_0 = 2$ und $f(x_0) = f(2) = \frac{2}{e}$.
Mithilfe der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir $f'(x) = (1-x) \cdot e^{1-x}$.
Daher gilt $f'(x_0) = f'(2) = -\frac{1}{e}$.
Durch Einsetzen dieser Daten in die allgemeine Tangentengleichung erhalten wir die Gleichung der Tangente (Ausfahrt).
$t(x) = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$.
Sie schneidet die x-Achse, d. h. den Fluss an der Stelle $x = 4$.

Graph:



Allgemeine Tangentengleichung
$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Steigung der Tangente
$f(x) = x \cdot e^{1-x}$
$f'(x) = (1-x) \cdot e^{1-x}$
$f'(2) = -\frac{1}{e}$

Gleichung der Tangente
$t(x) = -\frac{1}{e}(x-2) + \frac{2}{e}$
$t(x) = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$

Schnittpunkt mit der x-Achse
$t(x) = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} = 0$, $x = 4$

Beispiel: Flächeninhalt

Durch Ableiten von F mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel wird nachgewiesen, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Anschließend berechnen wir den Inhalt der Fläche A unter f über $[0; 2]$.
Resultat: $A \approx 1{,}61$
Das entspricht 16 100 m².

Diese Fläche reicht bei 20 m² pro Baum für ca. 805 Bäume.

Beispiel: Extremalproblem

Wir stellen zunächst den Inhalt A als Funktion von x dar: $A(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$.
Dann bilden wir die Ableitung A' von A und setzen diese null. Wir erhalten zwei Nullstellen von A' bei $x = 0$ und $x = 2$. Die erste kommt nicht in Frage, die zweite ist die gesuchte Maximalstelle, was man durch Überprüfen mittels A'' bestätigen könnte.
Resultat: Der Punkt $P\left(2\middle|\frac{2}{e}\right)$ führt zum Rechteck mit der Maximalfläche $\frac{4}{e} \approx 1{,}47$.

Stammfunktionsnachweis
$F(x) = (-1-x) \cdot e^{1-x}$
$F'(x) = (-1) \cdot e^{1-x} + (-1-x) \cdot (-e^{1-x})$
$= x \cdot e^{1-x} = f(x)$

Flächeninhalt
$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot e^{1-x}\,dx$
$= [(-1-x) \cdot e^{1-x}]_0^2 = -\frac{3}{e} + e \approx 1{,}61$

Zahl der Bäume
$B = \frac{16\,100}{20} = 805$

$A = x \cdot y = x \cdot f(x) = x \cdot xe^{1-x} = x^2 \cdot e^{1-x}$
$A'(x) = 2xe^{1-x} + x^2 \cdot (-e^{1-x})$
$= (2x - x^2) \cdot e^{1-x}$
$A' = 0$: $(2x - x^2) \cdot e^{1-x} = 0$
$2x - x^2 = 0$
$x = 0$ (Min), $x = 2$ (Max)
$y = f(2) = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$
$A_{Max} = \frac{4}{e} \approx 1{,}47$

Big113

Beispiel: Kurvendiskussion Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{0{,}5x}$ auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$? Zeichnen Sie den Graphen von f für $-7 \leq x \leq 2{,}5$.

Big113

1. Ableitungen:
Die Ableitungen werden mit der Produktregel und der Kettenregel bestimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x^2 - 2x) \cdot e^{0,5x}\right]' \\ &= (2x-2) \cdot e^{0,5x} + (x^2-2x) \cdot (0,5\, e^{0,5x}) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}x^2 + x - 2\right) \cdot e^{0,5x} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{2}x\right) \cdot e^{0,5x}$$

$$f'''(x) = \left(\tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{3}{2}\right) \cdot e^{0,5x}$$

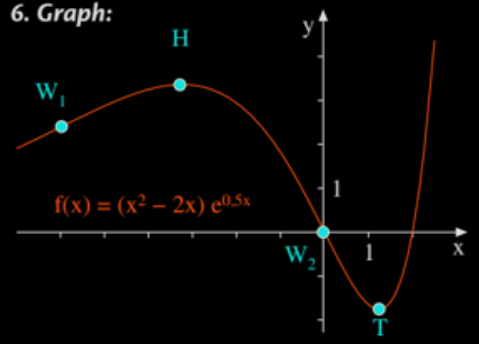
2. Nullstellen:
Die Funktion besitzt zwei Nullstellen, nämlich bei $x = 0$ und $x = 2$.

3. Extrema:
Die Ableitung f' hat zwei Nullstellen, bei $x = -1 - \sqrt{5} \approx -3{,}24$ und $x = -1 + \sqrt{5} \approx 1{,}24$. Die Überprüfung mittels f'' ergibt ein Maximum im ersten Fall und ein Minimum im zweiten Fall. Nach Berechnung der zugehörigen y-Werte erhalten wir einen Hochpunkt $H(-3{,}24|3{,}36)$ sowie einen Tiefpunkt $T(1{,}24|-1{,}75)$.

4. Wendepunkte:
Die Nullstellen von f'' liegen bei $x = 0$ und $x = -6$. Nach Überprüfung mit Hilfe von f''' und nach Berechnung der zugehörigen y-Werte erhalten wir einen Links-Rechts-Wendepunkt $W_1(-6|2{,}39)$ und einen Rechts-Links-Wendepunkt $W_2(0|0)$.

5. Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Wir überprüfen das Grenzverhalten von f durch Testeinsetzungen. Ergebnis:
Für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte gegen 0. Der Graph von f schmiegt sich von oben an die negative x-Achse.
Für $x \to \infty$ steigt der Graph von f steil an und wächst über alle Grenzen.

6. Graph:



$f(x) = 0$:
$$(x^2 - 2x) \cdot e^{0,5x} = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$\mathbf{x = 0;\ x = 2}$$

$f'(x) = 0$:
$$\left(\tfrac{1}{2}x^2 + x - 2\right) \cdot e^{0,5x} = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 + x - 2 = 0$$
$$x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x = -1 \pm \sqrt{5} \approx -1 \pm 2{,}24$$

$\mathbf{x \approx -3{,}24}$	$\mathbf{x \approx 1{,}24}$
$y \approx 3{,}36$	$y \approx -1{,}75$
$f''(-3{,}24) < 0$	$f''(1{,}24) > 0$
Maximum	Minimum

$f''(x) = 0$:
$$\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{2}x\right) \cdot e^{0,5x} = 0$$
$$\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{2}x = 0$$
$$x\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{2}\right) = 0$$

$\mathbf{x = 0}$	$\mathbf{x = -6}$
$y = 0$	$y \approx 2{,}39$
$f'''(0) > 0$	$f'''(-6) < 0$
R-L-WP	L-R-WP

x	−1	−5	−10	$\to -\infty$
f(x)	1,82	2,9	0,81	$\to 0$

x	1	5	10	$\to \infty$
f(x)	−1,65	182,7	$1{,}2 \cdot 10^4$	$\to \infty$

Big114

5. Kurvendiskussionen

Führen Sie eine Kurvendiskussion durch. Überprüfen Sie hierzu f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Untersuchen Sie, wie f sich für $x \to \pm \infty$ verhält. Skizzieren Sie den Graphen von f in einem sinnvollen Bereich. Überprüfen Sie Ihre Skizze mit dem TR/Computer.

a) $f(x) = (2x + 2) \cdot e^{-0,5x}$ b) $f(x) = (1 - x) \cdot e^{2-x}$ c) $f(x) = e^{x} - 2e^{-x}$