Mathematatik Q1 Abels

Kopfübung

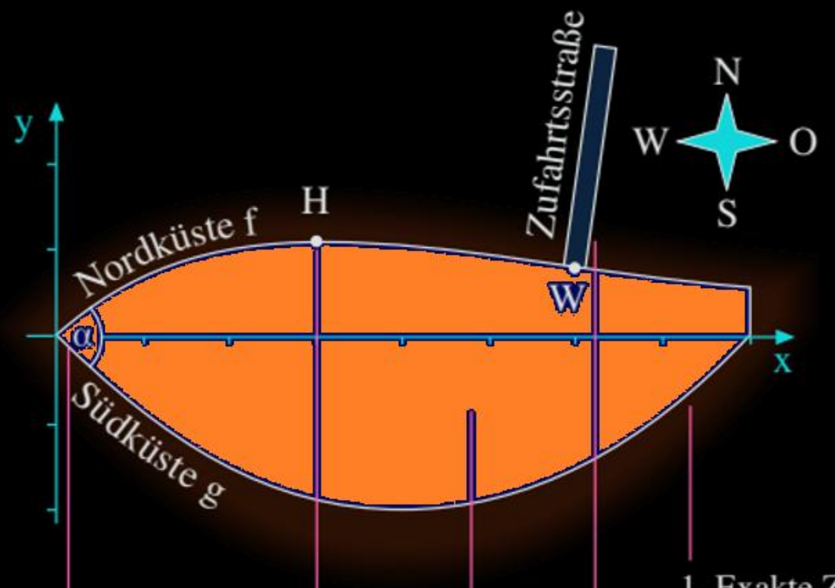
- $\int \left(\frac{1}{8}x^2 - x\right)dx = \cdots$

- Weise nach, dass $F(x) = (-3x - 9) \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ eine Stammfunktion von

  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ ist.

Modellierung von Exponentialfunktionen

Beschreibe für jedes Problem kurz, wie du vorgehen würdest.



1. Exakte Zeichnung der Insel
   Problem der Kurvendiskussion
2. Gleichung der Zufahrtsstraße, welche im Wendepunkt orthogonal auf die Nordküste stößt.
   Problem der Wendenormalen
3. Größe der Inseloberfläche
   Problem der Flächenberechnung
4. Lage des nördlichsten Inselpunktes
   Extremalproblem
5. Größe des Winkels zwischen Nord- und Südküste
   Schnittwinkelproblem

Big127,128

Beispiel: Inselproblem

Wie groß ist die abgebildete Insel, wenn die Nordküste durch die Randkurve $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ und die Südküste durch die Randkurve $g(x) = \frac{1}{8}x^2 - x$ erfasst wird (1 LE = 1 km)?

Hinweis: Verwenden Sie, dass $F(x) = (-3x - 9) \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ eine Stammfunktion von f ist.

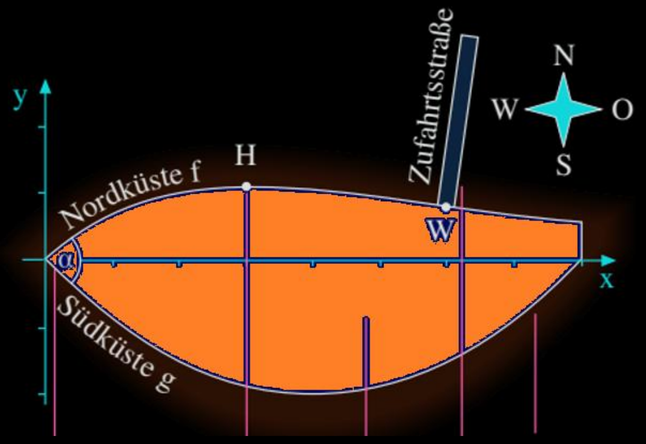
Beispiel: Inselproblem, Teil 2

Eine Insel wird nach Norden durch die Randkurve $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ und nach Süden durch $g(x) = \frac{1}{8}x^2 - x$ begrenzt ($0 \le x \le 8$, 1 LE = 1 km).

a) Bestimmen Sie f' und f''.

b) Wo liegt der nördlichste Inselpunkt?

c) Eine vom Festland kommende Zufahrtsbrücke trifft im Wendepunkt W auf die Nordküste. Wie lautet die Geradengleichung der Brücke?



Big127,128

Beispiel: Inselproblem

Lösung:
Die Stammfunktion F der Nordküste ist gegeben. Die Südküste $g(x) = \frac{1}{8}x^2 - x$ hat die Stammfunktion $G(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.
Nun können wir durch Integration den Inhalt des nördlichen Inselteils und den Inhalt des südlichen Teils bestimmen ($6{,}71\,km^2$ bzw. $10{,}67\,km^2$).
Die Insel hat also eine Gesamtfläche von $A = 17{,}38\,km^2$.

$$\int_0^8 f(x)\,dx = [F(x)]_0^8 = F(8) - F(0)$$
$$= \left(-33e^{-\frac{8}{3}}\right) - (-9) \approx 6{,}71$$

$$\int_0^8 g(x)\,dx = [G(x)]_0^8 = G(8) - G(0)$$
$$= \left(-\frac{32}{3}\right) - (0) \approx -10{,}67$$

$$A = 6{,}71 + 10{,}67 = 17{,}38$$

Beispiel: Inselproblem, Teil 2

Lösung zu a:
Wir bestimmen f′ mit Produkt- und Kettenregel, ausgehend von
$f(x) = u \cdot v = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$.
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-\frac{1}{3}x} + x \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right)$
$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{3}x\right)e^{-\frac{1}{3}x}$
Lösung zu b:
Der nördlichste Inselpunkt ist der Hochpunkt der Randkurve f. Diesen bestimmen wir mit Hilfe der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$. Er liegt bei $H(3\,|\,1{,}10)$.
Die Überprüfung mit der hinreichenden Bedingung $f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$ ergibt, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.
Lösung zu c:
Die Brücke schneidet die Kurve im Wendepunkt orthogonal. Also handelt es sich um die Wendenormale von f.
Wir berechnen zunächst den Wendepunkt von f. Er liegt bei $W(6\,|\,0{,}81)$. Als nächstes wird die Steigung von f an der Wendestelle bestimmt: $f'(6) = -e^{-2} \approx -0{,}135$.
Nun werden diese Ergebnisse in die allgemeine Normalengleichung eingesetzt.
Resultat: $n(x) \approx 7{,}39x - 43{,}52$

1. Ableitungen

$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{3}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}\right) \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$

2. Hochpunkt von f

$f'(x) = 0$

$\left(1 - \frac{1}{3}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{3}x} = 0$

$1 - \frac{1}{3}x = 0$

$x = 3,\ y = 3 \cdot e^{-1} \approx 1{,}10$

Hochpunkt $H(3\,|\,1{,}10)$

3. Wendepunkt von f

$f''(x) = 0$

$\frac{1}{9}x - \frac{2}{3} = 0$

$x = 6,\ y = 6e^{-2} \approx 0{,}81$

Wendepunkt $W(6\,|\,0{,}81)$

4. Wendenormale

$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

$n(x) = e^2(x - 6) + 6e^{-2}$

$n(x) \approx 7{,}39x - 43{,}52$

Übung 1 **Zoo**

Ein Tiergehege wird durch einen Zaun $f(x) = (4 - x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$, einen Wassergraben und eine Mauer bei $x = -4$ wie abgebildet begrenzt (1 LE = 100 m).

a) Wie groß ist die maximale Nord-Süd-Ausdehnung des Geheges? Wie lang ist die Begrenzungsmauer?

b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass $F(x) = (a - 2x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist. Welchen Flächeninhalt hat das Gehege?