Mathematatik Q2 Abels

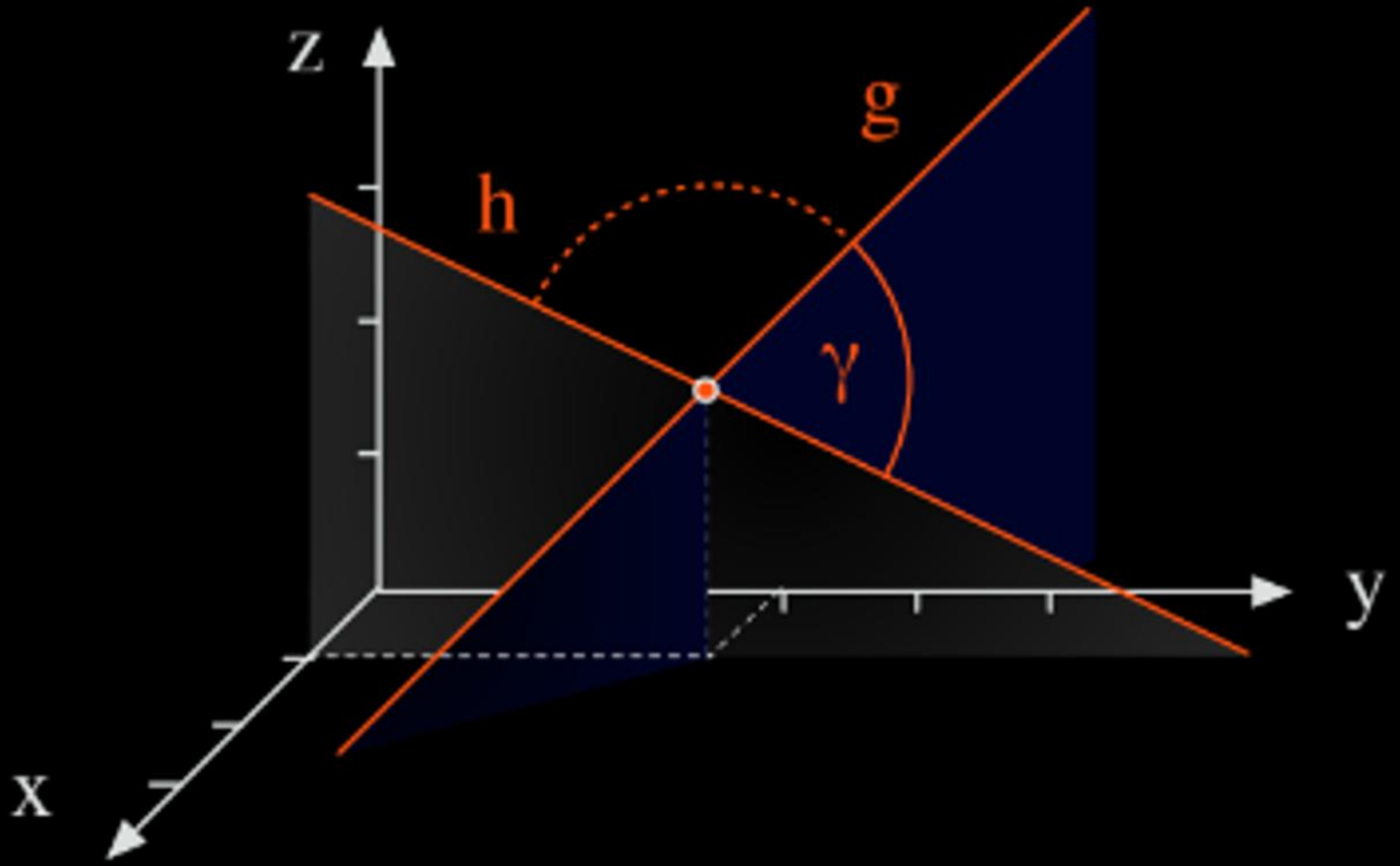
Kopfübung

Gesucht ist die relative Lage von g und h.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der **Winkel** zwischen **Geraden**

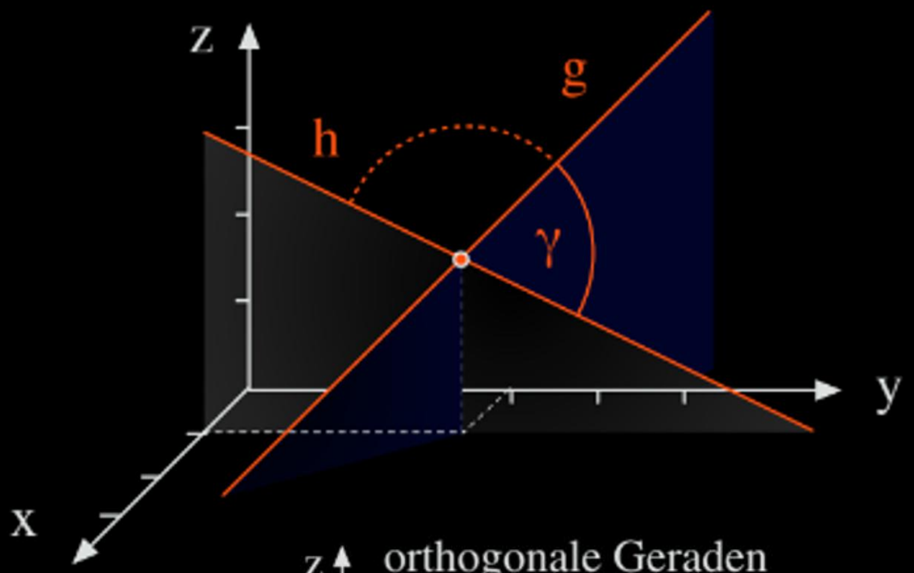
$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

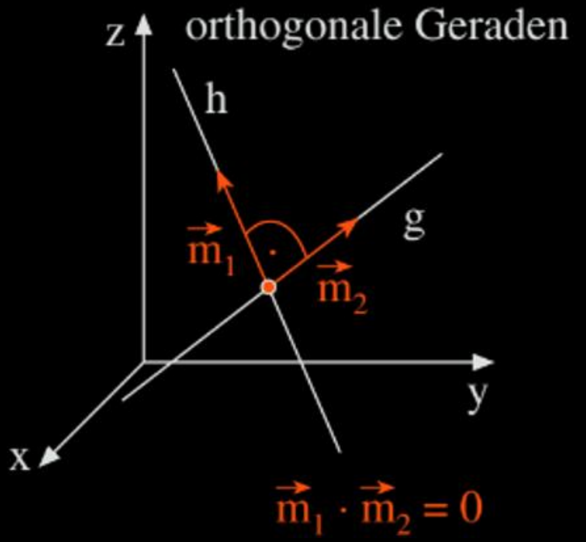


Schnittwinkel von Geraden

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|}$$

$$0° \leq \gamma \leq 90°$$





Big103,104

Übung 1 **Schnittpunkt und Schnittwinkel**

Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Übung 2 **Orthogonale Geraden**

Überprüfen Sie, ob g und h senkrecht stehen oder ob sie für einen Wert von a senkrecht stehen können.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übung 3 **Schnittpunkt und Schnittwinkel**

Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) g durch A (2|1) und B (3|2),
h durch C (2|7) und D (4|5)

d) g durch A (3|2|5) und B (5|6|3),
h durch C (4|3|7) und D (−2|−6|4)

Übung 4 **Ursprungsgerade**

Unter welchen Winkeln schneidet die Ursprungsgerade g: $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Koordinatenachsen?

Übung 5 **Parameteraufgabe**

Bestimmen Sie t so, dass die Gerade durch P (6|4|t) die x-Achse bei x = 3 unter 60° schneidet.

Big103,104

1. a) $S(-2|0|-3)$, $\cos\gamma = \frac{1}{6}$, $\gamma \approx 80{,}41°$ b) $S(2|0)$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\gamma \approx 53{,}13°$

2. a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 3 \neq 0$, g und h stehen nicht senkrecht zueinander.

   b) $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} = 0$, g und h stehen senkrecht zueinander.

   c) $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\end{pmatrix} = -3 - a = 0$ für $a = -3$, also sind g und h für diesen Wert senkrecht.

   d) $\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\2\\-1\end{pmatrix} = 2a + 6 = 0$ für $a = -3$, also sind g und h für diesen Wert senkrecht.

3. a) $g = h$ für $r = 2$, $s = 3$; $S(7|4)$, $\gamma = 26{,}57°$
   b) $g=h$ für $r = -2$, $s = -3$; $S(-1|-3|8)$, $\gamma = 22{,}21°$
   c) $g=h$ für $r = 3$, $s = 1{,}5$; $S(5|4)$, $\gamma = 90°$
   d) $g=h$ für $r = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{3}$; $S(2|0|6)$, $\gamma = 40{,}2°$

4. x-Achse: $\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \approx 0{,}218 \Rightarrow \gamma = 77{,}40°$, y-Achse: $\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}} \approx 0{,}436 \Rightarrow \gamma = 64{,}12°$

   z-Achse: $\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \approx 0{,}873 \Rightarrow \gamma = 29{,}21°$

5. $\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\t\end{pmatrix}}{\sqrt{25+t^2}} = \frac{3}{\sqrt{25+t^2}} = \cos 60° = 0{,}5$

   $\Rightarrow \sqrt{25+t^2} = 6 \Rightarrow t = \pm\sqrt{11}$

Big104

Übung 6 Die Mittelsenkrechte auf einer Strecke im $\mathbb{R}^2$

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(1|2), B(9|0) und C(5|6).

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n} = \binom{x}{y}$, der senkrecht auf dem Streckenvektor $\overrightarrow{AB}$ steht.

c) Stellen Sie die Gleichung der Mittelsenkrechten g_{AB} der Strecke $\overline{AB}$ auf.

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Geben Sie die Bedeutung des Punktes S an.