

Mathematik Q2 Abels





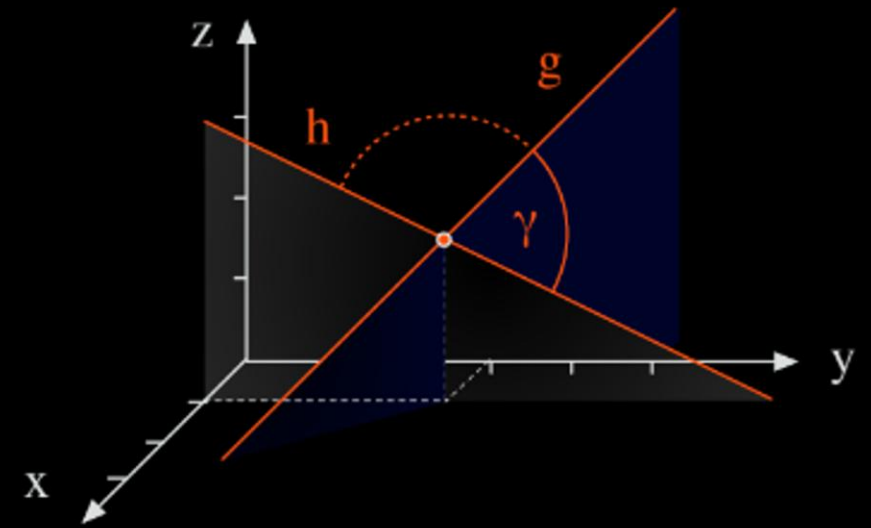
Kopfübung

- Bestimme den Schnittwinkel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Begründe:

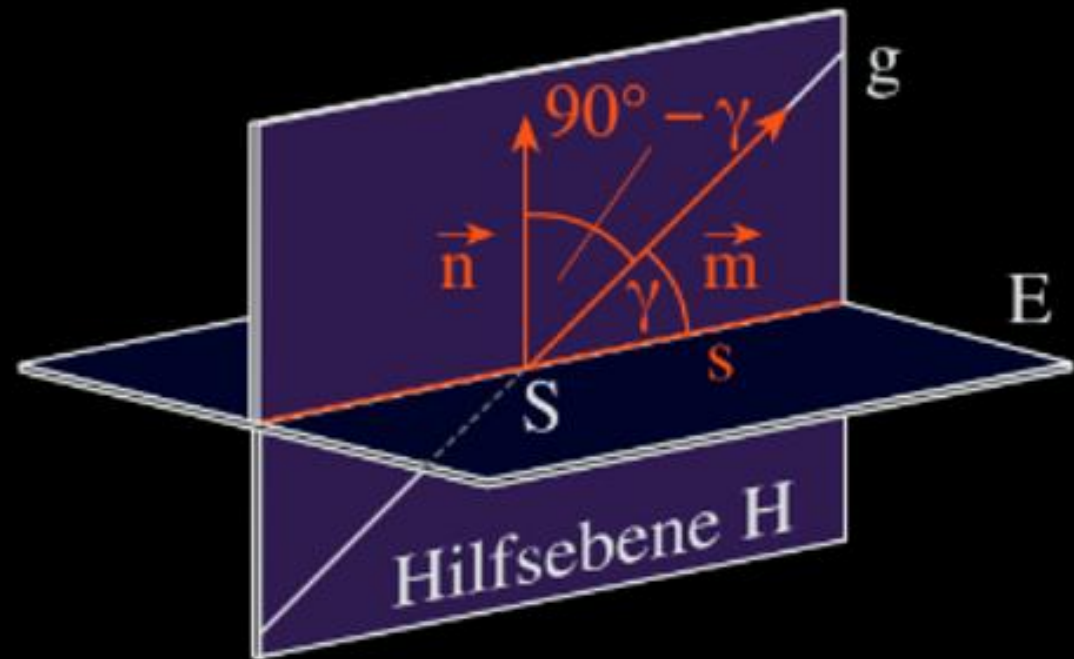
$$\cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma$$



Winkel zwischen Geraden und **Ebenen**

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$



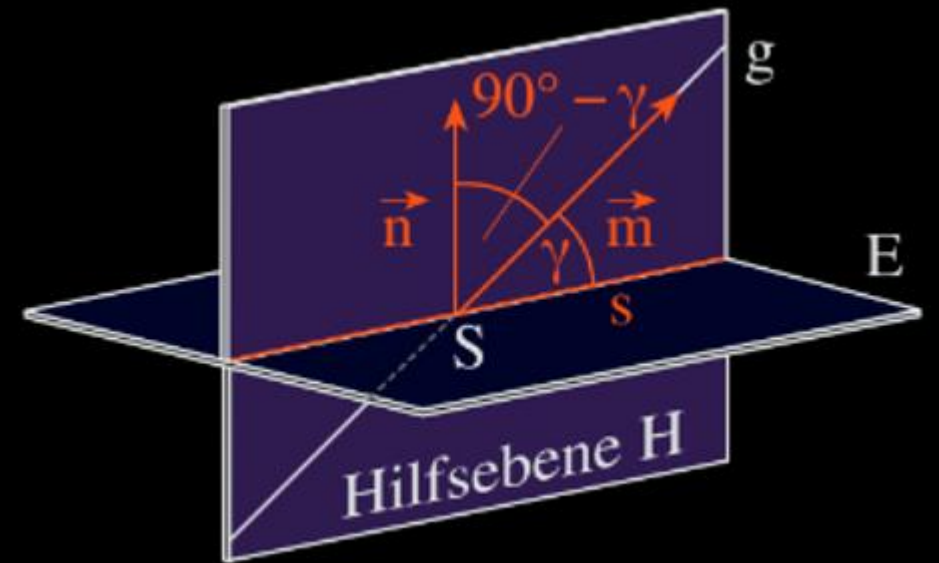
Schnittwinkel Gerade/Ebene



$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\sin \gamma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$$





Big257,259

Übung 3 Schnittwinkel Gerade/Ebene

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden g durch $A(1|0|-2)$ und $B(-2|3|1)$ mit der Ebene E .

a) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

b) $x + 2y + 2z = 6$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) E ist die x - y -Ebene.

e) E ist die x - z -Ebene.

f) E ist die y - z -Ebene.

6. Schnittwinkel Gerade/Ebene

Die Gerade g schneidet die Ebene E . Berechnen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel γ :

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, E: -x + y + 2z = 6$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Big257



$$3. \text{ a) } \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{\sqrt{27 \cdot 17}}, \quad \gamma \approx 24,84^\circ$$

$$\text{b) } \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}, \quad \gamma \approx 35,3^\circ$$

$$\text{c) } \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{15}{\sqrt{27 \cdot 139}}, \quad \gamma \approx 14,2^\circ$$

$$\text{d) } \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{\sqrt{27}}, \quad \gamma \approx 35,3^\circ$$

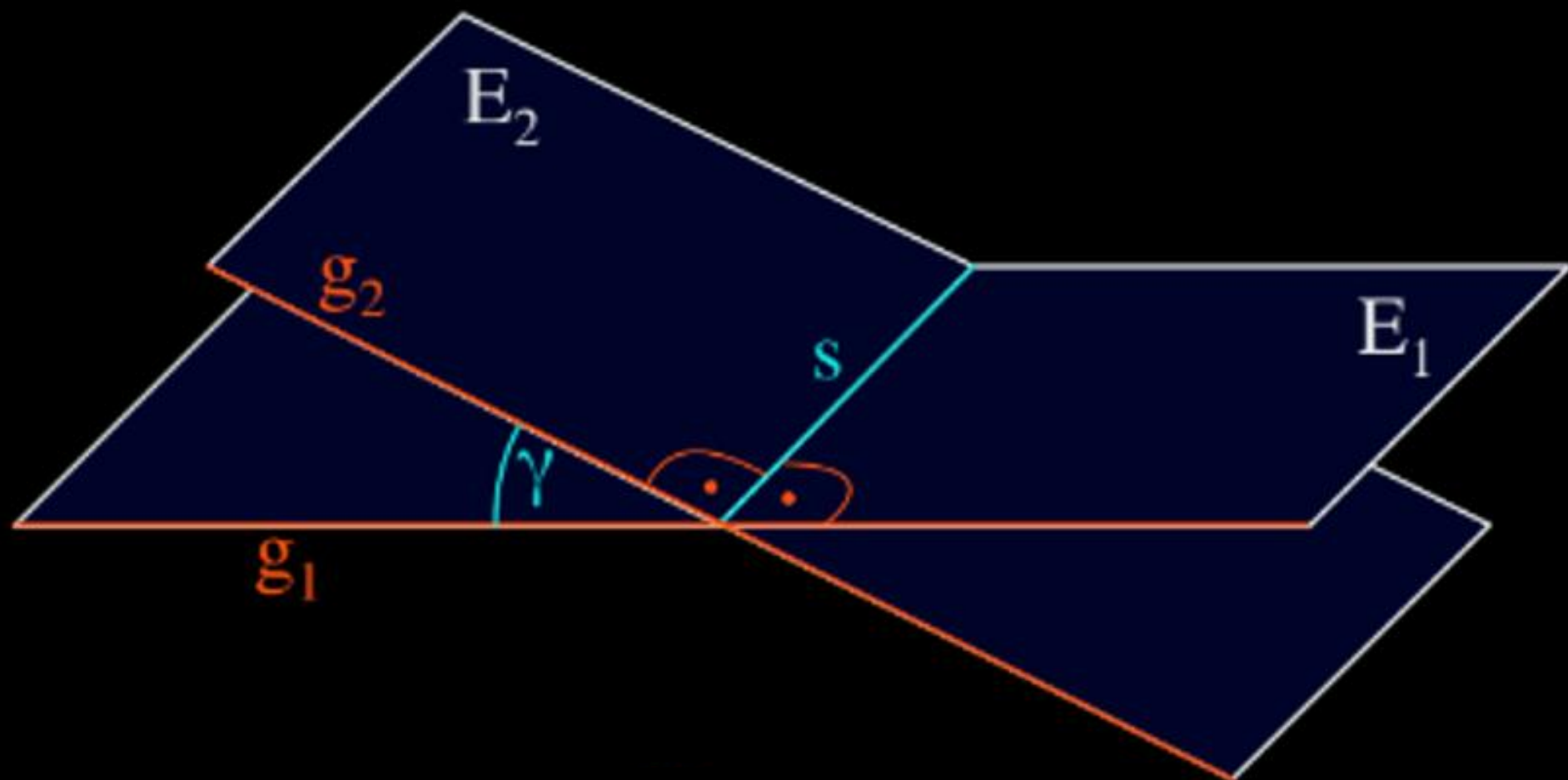
$$\text{e) } \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \gamma \approx 35,3^\circ$$

$$\text{f) } \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \gamma \approx 35,3^\circ$$

$$6. \text{ a) } g \cap E: r = 1, S(1||3), \quad \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{3 \cdot \sqrt{22}}} = \frac{8}{\sqrt{66}}, \quad \gamma \approx 79,98^\circ$$

$$\text{b) } g \cap E: r = -1, S(-1||2), \quad \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{6 \cdot \sqrt{6}}} = \frac{4}{6}, \quad \gamma \approx 41,81^\circ$$

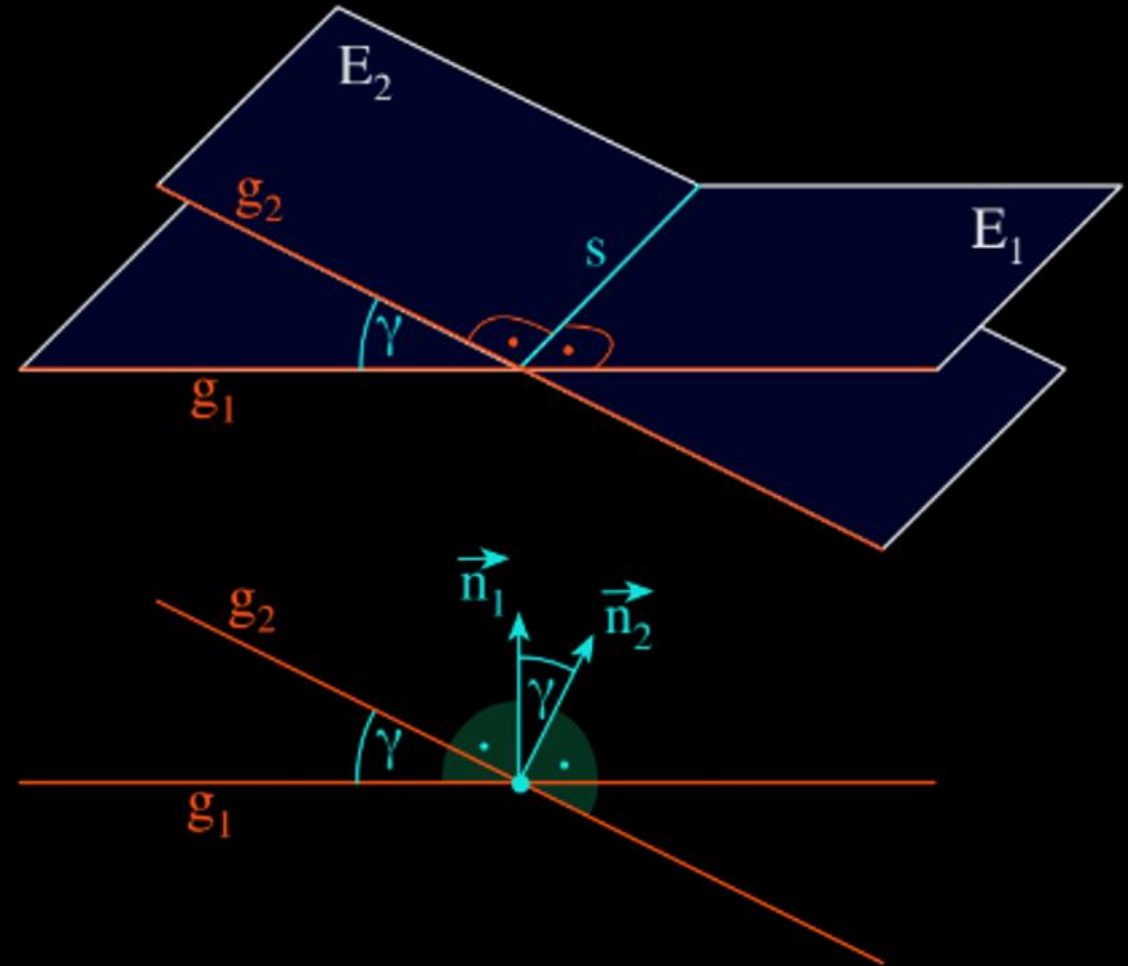
$$\text{c) } E: 2x + 2y + z = 4, \quad g \cap E: r = -1, S(1||0), \quad \sin \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}} = \frac{5}{\sqrt{27}}, \quad \gamma \approx 74,21^\circ$$



Schnittwinkel Ebene/Ebene



$$\cos \gamma = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$





Big258,259

Übung 4 Schnittwinkel Ebene/Ebene

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 sowie die Gleichung der Schnittgeraden.

a) $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

E_2 ist die x-y-Ebene.

b) $E_1: x + 2y + 2z = 6$

$E_2: x - y = 0$

c) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$E_2: x + 3z = 4$

8. Schnittwinkel Ebene/Ebene

Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich. Bestimmen Sie den Schnittwinkel γ .

a) $E_1: 2x - y + 3z = 6$

$E_2: x - y - z = 3$

b) $E_1: x + y = 3$

$E_2: y = 1$

c) $E_1: 2x + z = 1$

$E_2: x - z = 0$



Big258



$$4. \text{ a) } \cos \gamma = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}, \quad \gamma \approx 61^\circ$$

$$E_1: 3x - 2y + 2z = 5, \quad E_2: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } E_1: s = \frac{3}{2}r - \frac{5}{2}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 1+s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ in } E_1: 1+s+2(1+s)+2r=6, \quad r = -\frac{3}{2}s + \frac{3}{2}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \quad \cos \gamma = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \gamma \approx 76,37^\circ$$

$$\text{c) } \cos \gamma = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|}, \quad \gamma \approx 36,4^\circ, \quad E_1 \text{ in } E_2: t = -\frac{7}{8}s, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$8. \text{ a) } \cos \gamma = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{14} \cdot 3} = 0, \quad \gamma = 90^\circ$$

$$\text{c) } \cos \gamma = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \gamma \approx 71,57^\circ$$

$$\text{b) } \cos \gamma = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 45^\circ$$



Big259

9. Schnittwinkel Gerade/Ebene und Vektoren

Exakt in der Mitte der rechten Dachfläche der abgebildeten Halle tritt eine 12m hohe Antenne aus, die durch einen Stahlstab fixiert wird, der 4m unterhalb der Antennenspitze sowie in der Mitte am Dachfirst verschraubt ist.

- Welchen Winkel bildet die Antenne mit der Dachfläche?
- Welchen Winkel bildet der Stahlstab mit der Antenne bzw. mit der Dachfläche?

